Lehrbuch

der

elementaren Mathematik

von

Victor Schlegel,
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

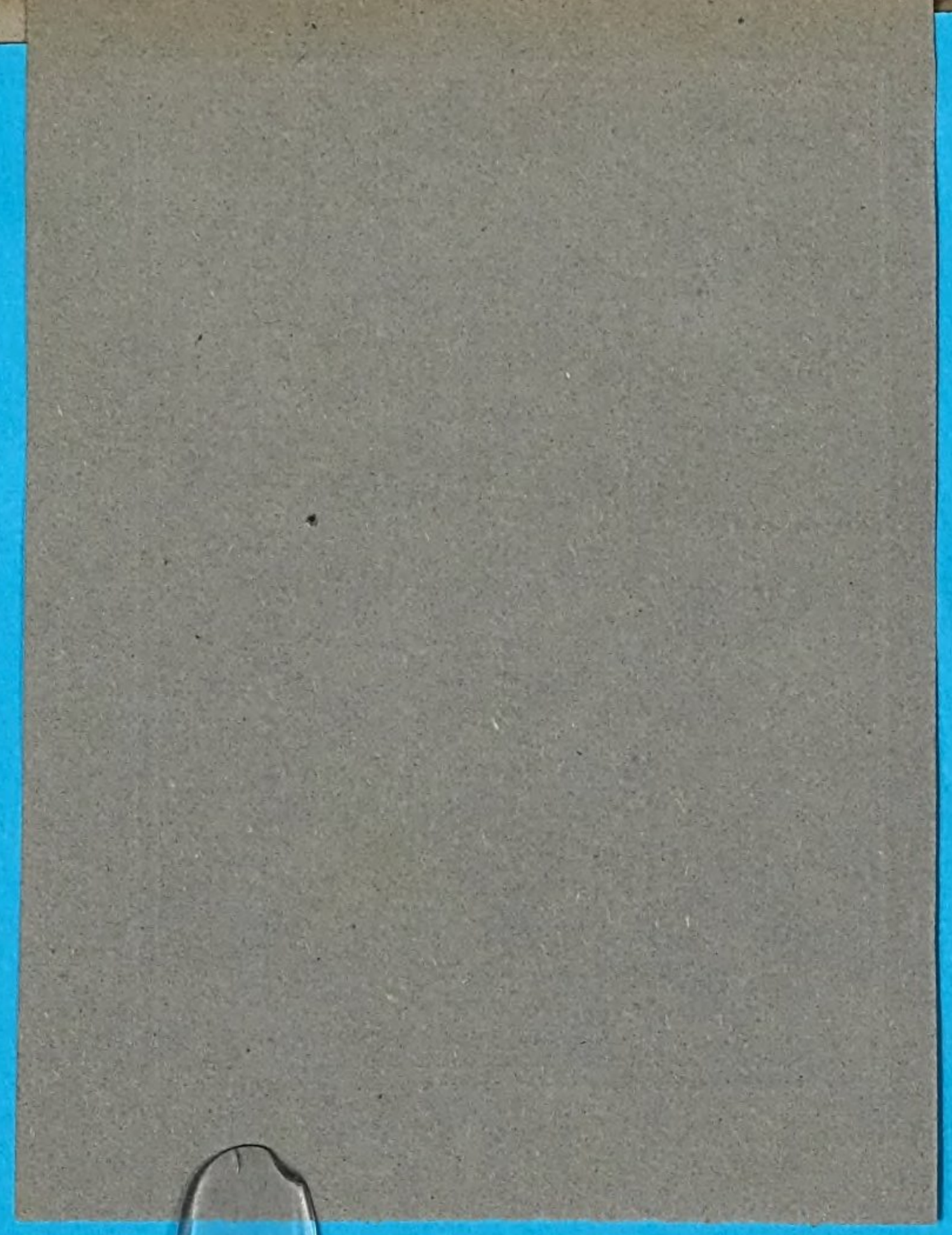
Dritter Theil.

Trigonometrie.

(Mit einer vierstelligen Logarithmentafel.)

Wolfenbüttel
Druck und Verlag von Julius Zwissler.
1880.

Für den Schulgebrauch wird empfohlen, die Logarithmentafel separat binden zu lassen.



Trigonometrie.

Lehrbuch

der

elementaren Mathematik

von

Victor Schlegel,
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

Dritter Theil.

Trigonometrie.

(Mit einer vierstelligen Logarithmentafel.)

Wolfenbüttel
Druck und Verlag von Julius Zwissler.
1880.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede.

Bei der Bearbeitung des vorliegenden, die Trigonometrie enthaltenden Theils meines Lehrbuches habe ich mich im Wesentlichen an den von H. Grassmann in seinem „Lehrbuch der Trigonometrie“ (Berlin 1865 b. Enslin) befolgten Gang angeschlossen, der durch langjährige Erfahrung als erprobt gelten kann. Zu den Eigenthümlichkeiten dieses Ganges gehört die Beschränkung der anfänglichen Betrachtung auf den Cosinus, der deswegen vorangestellt zu werden verdient, weil in dem Verhältniss, durch welches er dargestellt wird, nur Stücke der Schenkel des Winkels vorkommen, und weil bei der Erweiterung des Funktionsbegriffes auf stumpfe Winkel beim Cosinus die Zeichenbestimmung auf das Einfachste erfolgt. Ferner die Zurückführung aller übrigen Funktionen auf die Funktion des Cosinus, wodurch die Ableitung aller übrigen Formeln aus einer einzigen, geometrisch herzustellenden Formel ermöglicht wird. Bei der Berechnung der Dreiecke habe ich alle Vortheile zu benutzen gesucht, welche durch feststehende und durch abgekürzte Bezeichnungen erreicht werden können. Als sehr nützlich kann ich auch die Ausführung aller dieser Rechnungen nach dem Schema empfehlen, welches S. 68 und 69 angewendet ist, weil es die Uebersichtlichkeit der Rechnung und die Bequemlichkeit des Nachrechnens ungemein erhöht. Auf den analytischen Zusammenhang der verschiedenen Fälle, auf welchen Diekmann neuerdings hingewiesen hat (Programm Essen 1877), ist dabei durch Nr. 49 gebührend Rücksicht genommen, allerdings ohne Benutzung des für diese einfachen Aufgaben mir überflüssig erscheinenden Determinanten-Apparates. Vierecke und sonstige Polygone habe ich nicht in Betracht gezogen. Dieselben scheinen mir unter den Aufgaben eine passendere Stelle zu finden, als im Texte des Lehrbuches. Einiges über Vierecke findet man in den Aufgaben 396—405. Dagegen ist die trigonometrische Lösung der quadratischen und cubischen Gleichung vollständig durchgeführt.

Im Ganzen fasse ich die Trigonometrie nicht so ausschliesslich von der geometrischen Seite auf, wie es in den meisten Lehrbüchern geschieht, sondern betrachte sie nur als eine Anwendung der allgemeinen Funktionslehre auf die Geometrie. Dies darzuthun, dient der Abschnitt „Die Winkelfunktionen in trans-

cendenter und Reihenform“ (S. 25—40). Zur richtigen Beurtheilung der trigonometrischen Funktionen scheint es mir äusserst wichtig, dass der Lernende die eine oder andere jener Reihen kennen lerne und so einen Einblick gewinne in den Zusammenhang zwischen algebraischen und transcendenten Funktionen. Dass man dabei Gelegenheit hat, die Berechnung der Logarithmen und der Zahl π in so äusserst einfacher Form kennen zu lernen, halte ich ebenfalls für ein beachtenswerthes Moment. Der wichtigste Grund für die Hinzufügung eines solchen Abschnittes scheint mir aber der zu sein, dass erst durch ihn die Arithmetik ihren vollständigen Abschluss erhält, ebenso wie die Lehre von den Gleichungen (wenigstens für Schulzwecke) durch die trigonometrischen Auflösungsmethoden.

Was endlich die dem Buche hinzugefügte Logarithmentafel betrifft, so darf ich mich hinsichtlich des Gebrauchs vierstelliger Logarithmen überhaupt auf die empfehlenden Worte Bremikers (in dem Vorwort zu seiner vierstelligen Logarithmentafel, Berlin 1874 bei Weidmann) berufen. Ueber die trigonometrische Tafel habe ich noch Folgendes zu bemerken: Ich konnte mich nicht entschliessen, die Bremiker'sche Eintheilung des Grades in 100 Theile zu adoptiren. So lange die Decimaltheilung nicht auch auf den Vollwinkel ausgedehnt wird, scheint mir eine theilweise Durchführung derselben unzweckmässig. Ich glaube aber überhaupt nicht, dass auf dem, dem bürgerlichen Leben ganz fernstehenden, Gebiete der Winkelmessung die Decimaltheilung jemals durchgeführt werden wird, weil ihre Vortheile zu den alsdann nöthigen Umrechnungen (allein auf astronomischem Gebiete!) in gar keinem Verhältniss ständen. — Andrerseits glaubte ich die Logarithmen in so enger Aufeinanderfolge geben zu sollen, dass die Interpolation der Proportionaltheile möglichst vereinfacht wird. Im Uebrigen kann ich auf die Einleitung zu den Tafeln selbst verweisen.

Möge auch dieser Theil des Werkes sich einer wohlwollenden Aufnahme erfreuen.

Waren im August 1879.

V. Schlegel.

Inhalt des dritten Theils.

Einleitung (1–5).

Seite

Der Begriff der Funktion (1—5) 1

Reine Trigonometrie.

A. Die Winkelfunktionen als geschlossene Ausdrücke (6—33).

I. Funktionen spitzer Winkel (6—19).

1. Der Cosinus (6—11) 4

6. 7. Einleitung. — 8. Erklärung. — 9. Die Cosinus von Complementwinkeln. — 10. Cosinus der Summe zweier spitzer Winkel. Cosinus des Doppelten eines Winkels. Cosinus der Hälfte eines Winkels. — 11. Berechnung der Cosinus spitzer Winkel. Tafel der Cosinus der spitzen Winkel von ½ zu ½ Grad.

2. Die übrigen Funktionen (12—19) 10

12. Vorbemerkung. — 13. a) Der Sinus. b) Die Tangens. c) Die Secans, Cosecans, Cotangens. — 14. Eintheilung der Funktionen nach ihrem Zusammenhange. a) Coordinirte, b) Reciproke Funktionen. — 15. Eintheilung der Funktionen nach ihrem Wachsthum. — 16. Die Grenzwerthe der Funktionen eines spitzen Winkels. — 17. Bestimmung von Winkeln und Funktionen durch einander. — 18. Berechnung von Funktionen spitzer Winkel. Funktionen der Winkel von 60^0, 45^0, 72^0. — 19. Geometrische Darstellung der Funktionen eines spitzen Winkels.

II. Funktionen beliebiger Winkel (20—33).

1. Der Cosinus (20—25) 16

20. Vorbemerkung. — 21. Erklärung. — 22. Die Cosinus von Supplementwinkeln. — 23. Die Cosinus der Grenzwinkel $2R$, $3R$, $4R$. — 24. Product zweier Cosinus. — 25. Cosinus der Summe zweier Winkel.

2. Die übrigen Funktionen (26—33) 21

26. Vorbemerkung. — 27. Erklärungen. — 28. Beziehungen zwischen den Funktionen zweier von einander abhängiger Winkel. a) Complementwinkel. b) Supplementwinkel. c) Entgegengesetzte Winkel — 29. Funktionen der Grenzwinkel $2R$, $3R$, $4R$. — 30. Funktionen der Summe und der Differenz zweier Winkel. — 31. Funktionen des Doppelten eines Winkels. — 32. Funktionen der Hälfte eines Winkels. — 33. Summe und Differenz zweier Sinus oder zweier Cosinus.

B. Die Winkelfunktionen in transcendenter und Reihenform (34—44)

. . 25

34. Vorbemerkung. — 35. Darstellung der Funktion a^x in Reihenform. — 36. Die Zahl e. — 37. Die Funktionen *cos* und *sin* in transcendenter und in Reihenform. — 38. Die Funktionen des Logarithmus und der Wurzel. —

Seite

39. Die inversen trigonometrischen Funktionen. — 40. Die Funktion *arcus-tangens* in Reihenform. — 41. Zusammenhang zwischen den Funktionen *log* und *arctg*. — 42. Die logarithmische Reihe. — 43. Berechnung von Logarithmen. — 44. Berechnung von π.

Angewandte Trigonometrie.

A. Die Berechnung der Dreiecke (45—61).

I. Das rechtwinklige Dreieck (45) 41

II. Das schiefwinklige Dreieck (46—61) 42

46. Vorbemerkung.

1. Erste Methode (47—49) 42

a) Geometrisches Verfahren. — 47. Der Sinussatz. — 48. Der Cosinussatz. — 49. b) Algebraisches Verfahren.

2. Zweite Methode (50—61) 45

a) Der Satz vom umbeschriebenen Kreise. — 50. Vorbemerkung. — 51. Anwendung des Satzes vom umbeschriebenen Kreise. — b) Der Tangentialsatz. — 52. Vorbemerkung. — 53. Ableitung des Tangentialsatzes aus dem Sinussatze. — 54. Anwendung des Tangentialsatzes. — c) Der Satz vom einbeschriebenen Kreise. — 55. Vorbemerkung. — 56. Bestimmung von ϱ durch die Seiten des Dreiecks. — 57. Ableitung des Satzes vom einbeschriebenen Kreise aus dem Cosinussatze. — 58. Anwendung des Satzes vom einbeschriebenen Kreise. — 59. Formeln zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks. — 60. Erweiterung. Der Satz vom anbeschriebenen Kreise. — 61. Berechnung des Dreiecks aus anderen Stücken als Seiten und Winkeln.

B. Die Auflösung von Gleichungen (62—68).

I. Die Gleichung vom zweiten Grade (62—65) . . . 55

62. Vorbemerkung. — 63. Erster Fall: $x^2+ax=+b$. — 64. Zweiter Fall: $x^2+ax=-b$. — 65. Reduction der algebraischen Lösung der gemischt-quadratischen Gleichung auf die trigonometrische Form.

II. Die Gleichung vom dritten Grade (66—68) . . . 59

66. Erster Fall: $y^3-3py=2q$; $(p^3>q^2)$. — 67. Reduction der algebraischen Lösung der cubischen Gleichung auf die trigonometrische Form. Zweiter Fall: $y^3-3py=2q$; $(p^3<q^2)$. — 68. Dritter Fall: $y^3+3py=2q$.

Uebersicht der Formeln und Regeln 64

Anhang.

Uebungssätze und Aufgaben 72

Rationale Dreiecke 80

1. Rechtwinklige Dreiecke. — 2. Schiefwinklige Dreiecke. — 3. Methode zur Aufstellung rationaler Dreiecke.

Register 87

Berichtigungen 87

Tafel vierstelliger Logarithmen 91

Einleitung.

Der Begriff der Funktion.

1. Wenn zwischen zwei mathematischen Grössen y und x eine Beziehung besteht, welche sich nicht ändert, wenn der Werth der einen Grösse x sich ändert, so heisst y eine Funktion von x (vgl. Th. I, S. 3). Jede Aenderung von x zieht eine bestimmte Aenderung von y nach sich, und jedem Werthe von x entspricht im Allgemeinen ein einziger bestimmter Werth von y. — Beispiele solcher Beziehungen liefern die Gleichungen der 7 Rechnungsarten:

$$y = a + x, \quad y = ax, \quad y = x^a, \quad y = a^x,$$

$$y = a - x, \quad y = \frac{a}{x}, \quad y = \sqrt[x]{a}, \quad y = {}^a\!l\, x,$$

$$y = x - a, \quad y = \frac{x}{a}, \quad y = \sqrt[a]{x}, \quad y = {}^x\!l\, a.$$

In allen diesen Fällen bleibt die durch die Gleichung ausgedrückte Beziehung zwischen y und x unverändert, wenn man der Grösse x nach einander verschiedene Werthe giebt. Jede Aenderung von x zieht, wenn a beständig denselben Werth behält, eine bestimmte Aenderung von y nach sich, und jedem Werthe von x entspricht im Allgemeinen ein bestimmter Werth von y. In allen diesen Fällen kann man daher sagen, y sei eine Funktion von x. Es ist also z. B. die Summe eine Funktion jedes einzelnen Summanden; ebenso ist ein Polynom, welches ausser einer Anzahl unveränderlicher Grössen die veränderliche Grösse x enthält, eine Funktion von x; in einer Gleichung mit zwei Unbekannten ist jede Unbekannte eine Funktion der andern (vgl. Th. I, S. 68, erste Anm.). — Ist z eine Funktion von y, und y eine Funktion von x, so ist auch

z eine Funktion von x. Denn denkt man sich aus den beiden Gleichungen, welche jene Zusammenhänge darstellen, y eliminirt, so bleibt eine Gleichung, welche bedeutet, dass z eine Funktion von x ist.

2. In der Arithmetik wurden einem Buchstaben wohl verschiedene Werthe beigelegt, indessen war von einer stetigen Aenderung einer Zahl nicht die Rede. Nachdem aber in der rechnenden Geometrie Strecken und Winkel durch Zahlen dargestellt worden sind, wird es nothwendig, den Begriff der stetigen Aenderung, wie sie eine Strecke durch Verschiebung des erzeugenden Punktes, und ein Winkel durch Drehung der erzeugenden Geraden erleidet, auch auf die Zahlen auszudehnen, durch welche diese Gebilde dargestellt werden. Die Zahl tritt dadurch in die Reihe der Funktions-Grössen (vgl. Th. I, S. 3).

3. Eine Funktion heisst algebraisch oder transcendent, jenachdem die Gleichung, welche zur Darstellung der Funktionsbeziehung dient, algebraisch oder transcendent ist (vgl. Th. I, Nr. 91). Von den oben angeführten 12 Funktionen sind also diejenigen der ersten und zweiten Rechnungsstufe, ferner x^a und $\sqrt[a]{x}\,(=x^{\frac{1}{a}})$ algebraisch, die übrigen 4 transcendent.

4. Die in den Sätzen und Formeln der rechnenden Geometrie auftretenden Funktionsbeziehungen zwischen zwei Strecken waren sämmtlich algebraisch; es bedurfte nicht der Einführung neuer Funktionen, um die Beziehungen zwischen zwei oder mehreren Strecken darzustellen. Ebenso liessen sich die Beziehungen zwischen zwei Winkeln überall durch algebraische Funktionen darstellen. Dagegen ist die Beziehung zwischen Strecken einerseits und Winkeln andrerseits noch nicht zum Gegenstande der Rechnung gemacht worden. Nur eine allgemeine Andeutung über solche Beziehungen gaben die Sätze Th. II, 98, 107, wo von der Grösse der zwei gleichen oder ungleichen Seiten eines Dreiecks gegenüberliegenden Winkel die Rede ist, und einige andre, z. B. 123. — Gleichwohl geht aus dem Umstande, dass die Winkel eines Dreiecks durch seine Seiten, und seine Seitenverhältnisse durch seine Winkel vollkommen bestimmt sind, hervor, dass es Gleichungen, also auch Funktionen geben muss, welche diese Bestimmung ausdrücken. Und wenn in der rechnenden Geometrie (Th. II, 362) bereits die Aufgabe gelöst wurde: „aus zwei Sei-

ten eines rechtwinkligen Dreiecks die dritte zu berechnen“, so tritt als natürliche Verallgemeinerung derselben die Aufgabe an uns heran: „aus drei beliebigen Stücken eines beliebigen Dreiecks die übrigen zu berechnen“.

5. Um diese Aufgabe lösen zu können, stellt man zuerst die Seitenverhältnisse des rechtwinkligen Dreiecks als Funktionen eines seiner Winkel (Winkelfunktionen) dar. Hieraus ergiebt sich die Lehre von den Winkelfunktionen oder Trigonometrie,*) welche ein specieller Zweig der allgemeinen Funktionslehre (vgl. Th. I, S. 3) ist. — Unter den Anwendungen der Trigonometrie ist in erster Linie diejenige Anwendung auf die Geometrie zu nennen, welche mit der Lösung der oben erwähnten allgemeinen Aufgabe zusammenfällt. Diese Anwendung (von welcher die ganze Wissenschaft ihren Namen hat) nennen wir „Trigonometrie im engeren Sinne“.

---

*) Die Lehre von den Winkelfunktionen wird meist Goniometrie genannt; es empfiehlt sich aber mehr, dem allgemeinen Theile der Wissenschaft, welcher sich mit diesen Funktionen beschäftigt, auch den üblichen allgemeinen Namen „Trigonometrie“ zu geben, und die specielle Anwendung auf die Lösung der Dreiecksaufgaben als „Tr. im engeren Sinne“ zu bezeichnen. — Auch der Name „Geometrie“ ist ja weit über seine ursprüngliche Bedeutung hinausgewachsen

Reine Trigonometrie.

A. Die Winkelfunktionen als geschlossene Ausdrücke.

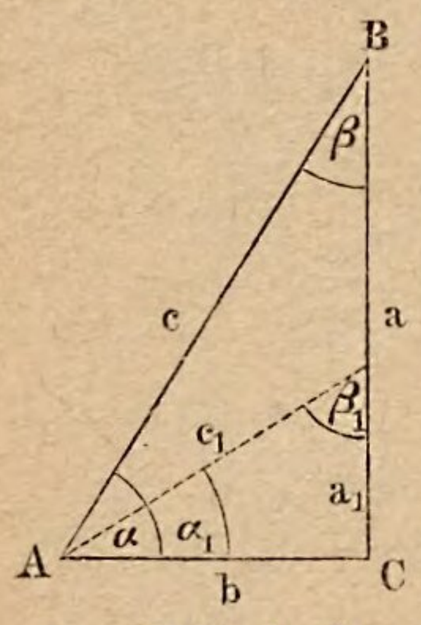
I. Funktionen spitzer Winkel.

1. Der Cosinus.

6. *Einleitung.* — Aus dem Satze: „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen“ (Th. II, 245) folgt, dass zwei rechtwinklige Dreiecke ähnlich sind, wenn sie in einem spitzen Winkel übereinstimmen. — Die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist also durch einen seiner spitzen Winkel vollkommen bestimmt. — Da aber das Verhältniss zweier Seiten eines Dreiecks gleich ist dem Verhältniss der homologen Seiten jedes ihm ähnlichen Dreiecks (Th. II, 243), so ist auch jedes Seitenverhältniss eines rechtwinkligen Dreiecks durch einen seiner spitzen Winkel vollkommen bestimmt.

7. Betrachtet man zuerst das Verhältniss der den spitzen Winkel α (Fig. 1) einschliessenden Seiten b und c, also $\frac{b}{c}$, so bleibt dasselbe (nach Th. II, 243) ungeändert, wenn das Dreieck sich so ändert, dass α und der rechte Winkel erhalten bleiben (z. B. wenn die durch BC bestimmte Gerade sich verschiebt). — Aendert aber das Dreieck sich so, dass der Winkel α bis α_1 abnimmt, während b und der rechte Winkel erhalten bleiben, so ist $B_1C < BC$, folglich (Th. II, 117) $B_1A < BA$, $\frac{1}{c_1} > \frac{1}{c}$ (Th. I, Anm. z. 83a), und $\frac{b}{c_1} > \frac{b}{c}$; d. h.: auch das Verhältniss der den Winkel α einschliessenden Seiten ändert sich. Ferner entspricht bei dieser Aenderung offenbar jedem Werthe von α ein bestimmter Werth von c, also auch von $\frac{b}{c}$. Und da beständig b und c die den Winkel α einschliessenden Seiten des

Fig. 1.



rechtwinkligen Dreiecks sind, so bleibt auch die Beziehung zwischen α und $\frac{b}{c}$ beständig dieselbe. Diese beiden Grössen erfüllen also die in Nr. 1 gestellten Anforderungen des Funktions-Zusammenhanges, und es kommt nur noch darauf an, für denselben einen Namen und ein Zeichen festzusetzen.

8. *Erklärung.* — Unter dem Cosinus eines spitzen Winkels α im rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältniss der dem Winkel anliegenden Kathete b zur Hypotenuse c.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Anm. Da es für den Werth des Verhältnisses $\frac{b}{c}$, also des $\cos\alpha$, gleichgiltig ist, in welchem rechtwinkligen Dreieck man den Winkel α betrachtet, so folgt, dass der $\cos\alpha$ eben nur eine Funktion des Winkels α ist, die von der Beschaffenheit jenes Dreiecks ganz unabhängig ist.

Eigenschaften des Cosinus. — 1) In Nr. 7 wurde gezeigt, dass, wenn der Winkel α abnimmt, das Verhältniss $\frac{b}{c}$ zunimmt.

Ist also $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\alpha_1 = \frac{b}{c_1}$,

und $\alpha > \alpha_1$,

so ist $\frac{b}{c} < \frac{b}{c_1}$,

d. h.: $\cos\alpha < \cos\alpha_1$.

In Worten: Der grössere von zwei spitzen Winkeln hat 1.
den kleineren Cosinus (und umgekehrt).

2) Nimmt α bis 0 ab, während b unverändert bleibt, so rückt B nach C, es wird $c = b$, und man hat

$$\cos 0 = 1. \qquad 2.$$

Nimmt α bis R zu, so rückt B in unendliche Entfernung, C wird $= \infty$, und $\frac{b}{c} = 0$ (Th. I, 149). Man hat also:

$$\cos R = 0. \qquad 3.$$

Anm. Es sind also 0 und 1 die Grenzen, zwischen denen der Cosinus eines spitzen Winkels sich bewegt, während der Winkel selbst von R bis 0 abnimmt. — Dass der Cosinus eines Winkels, als Quotient zweier Strecken, stets eine Zahl ist, folgt aus Th. II, 19.

9. *Die Cosinus von Complementwinkeln.* — Aus der Formel des Pythagoräischen Satzes, $a^2 + b^2 = c^2$, folgt:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Nun ist nach der Definition des Cosinus (Fig. 1)

$$\frac{a}{c} = \cos\beta, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha,$$

4. also $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$,*) wenn $\alpha + \beta = R$.

Anm. Die aus 4 sich ergebende Formel $\cos\beta = +\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ermöglicht die Berechnung des Cosinus eines Winkels aus demjenigen seines Complementwinkels. Kennt man also die Cosinus der zwischen 0 und 45^0 liegenden Winkel, so kann man mittelst dieser Formel die Cosinus der zwischen 45^0 und R liegenden berechnen.

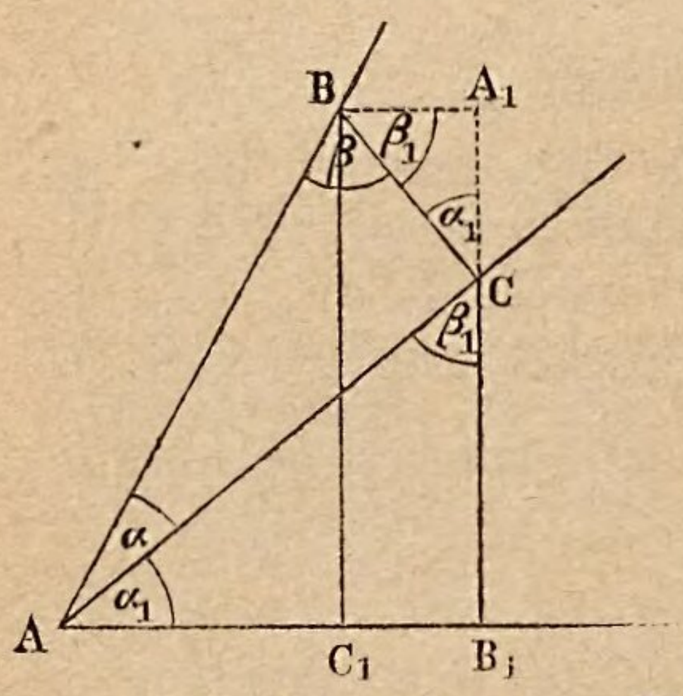
10. *Cosinus der Summe zweier spitzer Winkel.* — Auf einem nicht gemeinsamen Schenkel des einen von zwei anstossenden Winkeln α und α_1 sei die Strecke

$$AB = 1$$

abgetragen. Um dann die Winkel α, α_1, $\alpha+\alpha_1$ in rechtwinklige Dreiecke zu bringen, fällt man $BC \perp AC$, $CB_1 \perp AB_1$, $BC_1 \perp AC_1$. Dann ist im Dreieck $\overline{ABC_1}$

$$\cos(\alpha+\alpha_1) = AC_1 = AB_1 - C_1B_1.$$

Fig. 2.



Zieht man dann $BA_1 \parallel AB_1$ bis zum Schnittpunkt A_1 mit der Verlängerung von B_1C, so ist $C_1B_1 = BA_1$ (Th. II, 126). Also:

$$\cos(\alpha+\alpha_1) = AB_1 - BA_1 = \frac{AB_1}{AC}\cdot\frac{AC}{1} - \frac{BA_1}{BC}\cdot\frac{BC}{1}.$$

Nun ist nach der Definition des Cosinus

$$1)\ \frac{AB_1}{AC} = \cos\alpha_1; \quad 2)\ \frac{AC}{1} = \frac{AC}{AB} = \cos\alpha.$$

Ferner ist $\overline{AB_1C} \sim \overline{CA_1B}$ (Th. II, 245); also, wenn β und β_1 die Complementwinkel von α und α_1 sind, $A_1BC = B_1CA = \beta_1$, und

$$3)\ \frac{BA_1}{BC} = \cos\beta_1; \quad 4)\ \frac{BC}{1} = \frac{BC}{AB} = \cos\beta.$$

Setzt man die Werthe 1) bis 4) in dem Ausdruck für $\cos(\alpha+\alpha_1)$ ein, so folgt:

5. $\cos(\alpha+\alpha_1) = \cos\alpha \,.\, \cos\alpha_1 - \cos\beta \,.\, \cos\beta_1$, wenn $\left.\begin{matrix}\alpha & +\beta\\ \alpha_1 & +\beta_1\end{matrix}\right\} = R.$

Anm. Diese Formel gilt zunächst nur, wenn nicht allein α und α_1, sondern auch $\alpha+\alpha_1$ spitz ist.

---

*) Statt $(\cos\alpha)^2$ schreibt man gewöhnlich $\cos^2\alpha$ (Cosinusquadrat a).

Cosinus des Doppelten eines Winkels. — Setzt man in 5. $\alpha_1 = \alpha$, so ist auch $\beta_1 = \beta$, und man erhält:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta. \qquad 6.$$

Cosinus der Hälfte eines Winkels. — Durch Addition von

$$4. \qquad 1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$$

und

$$6. \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$$

folgt:

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha;$$

also:

$$\cos \alpha = + \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}},$$

oder, wenn man $2\alpha = \gamma$ setzt, woraus $\alpha = \frac{\gamma}{2}$ folgt:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}}. \qquad 7.$$

Anm. Formel 7 ermöglicht die Berechnung der Cosinus beliebig kleiner Winkel, die man durch fortgesetzte Halbirung eines Winkels erhält, dessen Cosinus man kennt. Formel 5 zeigt dann, wie man aus den Cosinus dieser kleinen Winkel wieder diejenigen grösserer zusammensetzen kann.

11. *Berechnung der Cosinus spitzer Winkel.* — a) *cos* 60^0. — Das gleichseitige Dreieck wird durch eine seiner Höhen in zwei rechtwinklige Dreiecke getheilt, in deren jedem die kleinere Kathete die Hälfte der Hypotenuse ist. Da also das Verhältniss der dem Winkel von 60^0 anliegenden Kathete zur Hypotenuse gleich $\frac{1}{2}$ ist, so hat man

$$\cos 60^0 = \tfrac{1}{2}. \qquad 8.$$

b) *cos* $7{,}5^0$. — Aus 8 erhält man nach 7 (oder 4), *cos* $30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660$. Hieraus weiter nach 7, *cos* $15^0 = 0{,}9659$, *cos* $7{,}5^0 = 0{,}9914$.

Anm. Die hier auftretenden vierstelligen Decimalbrüche sind natürlich Näherungswerthe, die durch numerische Bestimmung der Quadratwurzel (Th. I, S. 174, oder mit Hilfe der Logarithmen) gefunden werden.

c) Die Cosinus der Vielfachen von $7{,}5^0$. — Aus den schon bekannten Cosinus der Winkel von $7{,}5^0$ und 15^0 findet man nach 4, *cos* $82{,}5^0 = 0{,}1305$, *cos* $75^0 = 0{,}2588$. — Ferner die Cosinus derjenigen Vielfachen von $7{,}5^0$, welche nicht $> 45^0$ sind, nach 5, *cos* $22{,}5^0 = \cos(15^0 + 7{,}5^0) = 0{,}9238$, *cos* $37{,}5^0 = \cos(30^0 + 7{,}5^0) = 0{,}7934$, *cos* $45^0 = \cos(30^0 + 15^0) = 0{,}7071$. — Endlich die Cosinus derjenigen Vielfachen von $7{,}5^0$, welche $> 45^0$ sind, nach 4, *cos* $52{,}5^0 = 0{,}6088$, *cos* $67{,}5^0 = 0{,}3828$. — Die folgende Tabelle giebt diese Resultate geordnet mit Angabe der Differenzen je zweier auf einander folgender Cosinus.

0	*cos.*	*diff.*	0	*cos.*	*diff.*
90	0,0000		45	0,7071	
		0,1305			0,0863
82,5	0,1305		37,5	0,7934	
		0,1283			0,0726
75	0,2588		30	0,8660	
		0,1239			0,0579
67,5	0,3827		22,5	0,9239	
		0,1173			0,0420
60	0,5000		15	0,9659	
		0,1088			0,0255
52,5	0,6088		7,5	0,9914	
		0,0983			0,0086
45	0,7071		0	1,0000	

Anm. In dieser Tabelle ist bei *cos* 67,5⁰ und *cos* 22,5⁰ die oben berechnete vierte Decimalstelle durch die genauere ersetzt. Da überhaupt die Richtigkeit der letzten Decimalstelle unsicher ist (vgl. Th. I, Nr. 164), so wird nachher diese Stelle ganz weggelassen werden.

d) Die Cosinus der Vielfachen von 0,5⁰. — Dieselben können aus den Zahlenwerthen der obigen Tabelle bis auf 3 Decimalstellen genau gefunden werden, wenn man für jeden halben Grad zwischen 90 und 82,5 den 15ten Theil der Differenz 0,1305, also 0,0087, ebenso für jeden halben Grad zwischen 82,5 und 75 den 15ten Theil der Differenz 0,1283, also 0,00855 addirt. — Auf die Intervalle 75⁰—67,5⁰ und 67,5⁰—60⁰ angewendet würde dieses Verfahren auf die Differenzen 0,00826 und 0,00782 führen, deren Unterschied schon zu gross ist, um nicht die Richtigkeit der dritten Decimalstelle zu stören. Theilt man aber den Unterschied dieser Differenzen, 0,00044 in 15 gleiche Theile (0,00003), und bildet, von 0,00826 (als der mittelsten Differenz des ersten Intervalles) ausgehend, durch 7-malige Addition und 22-malige Subtraction von 0,00003 die Differenzreihe (mit Weglassung der Nullen) 847, 844, 841, ... 763, 760, so erhält man durch successive Addition dieser Differenzen zu *cos* 75⁰ die Cosinus der Winkel von ½ zu ½ Grad bis 60⁰. — Die Abrundung der vierten Stelle (nach Th. I, 169) liefert dann die drei ersten Decimalstellen aller Cosinus richtig. (Nur bei 73⁰ ist gegen die Regel die Erhöhung der letzten Stelle zu unterlassen, bei 64,5⁰ auszuführen.) Die Berechnung von *cos* 0⁰ bis *cos* 30⁰ erfolgt dann nach 4, die von *cos* 30⁰ bis *cos* 45⁰ nach 5, endlich die von *cos* 45⁰ bis *cos* 60⁰ wieder nach 4. Auf diese Weise erhält man die folgende Tafel.

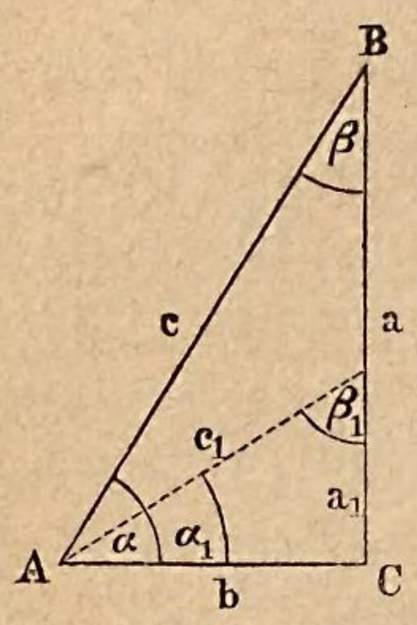
Tafel der Cosinus der spitzen Winkel von $^1/_2$ zu $^1/_2$ Grad.

0	cos	0	cos	0	cos	0	cos	0	cos	0	cos
90	0,000	**75**	0,259	**60**	0,500	**45**	0,707	**30**	0,866	**15**	0,966
89,5	0,009	74,5	0,267	59,5	0,508	44,5	0,713	29,5	0,870	14,5	0,968
89	0,017	74	0,276	59	0,515	44	0,719	29	0,875	14	0,970
88,5	0,026	73,5	0,284	58,5	0,522	43,5	0,725	28,5	0,879	13,5	0,972
88	0,035	73	0,292	58	0,530	43	0,731	28	0,883	13	0,974
87,5	0,044	72,5	0,301	57,5	0,537	42,5	0,737	27,5	0,887	12,5	0,976
87	0,052	72	0,309	57	0,545	42	0,743	27	0,891	12	0,978
86,5	0,061	71,5	0,317	56,5	0,552	41,5	0,749	26,5	0,895	11,5	0,980
86	0,070	71	0,326	56	0,559	41	0,755	26	0,899	11	0,982
85,5	0,078	70,5	0,334	55,5	0,566	40,5	0,760	25,5	0,903	10,5	0,983
85	0,087	**70**	0,342	**55**	0,574	**40**	0,766	**25**	0,906	**10**	0,985
84,5	0,096	69,5	0,350	54,5	0,581	39,5	0,772	24,5	0,910	9,5	0,986
84	0,105	69	0,358	54	0,588	39	0,777	24	0,914	9	0,988
83,5	0,113	68,5	0,367	53,5	0,595	38,5	0,783	23,5	0,917	8,5	0,989
83	0,122	68	0,375	53	0,602	38	0,788	23	0,921	8	0,990
82,5	0,131	67,5	0,383	52,5	0,609	37,5	0,793	22,5	0,924	7,5	0,991
82	0,139	67	0,391	52	0,616	37	0,799	22	0,927	7	0,993
81,5	0,148	66,5	0,399	51,5	0,623	36,5	0,804	21,5	0,930	6,5	0,994
81	0,156	66	0,407	51	0,629	36	0,809	21	0,934	6	0,995
80,5	0,165	65,5	0,415	50,5	0,636	35,5	0,814	20,5	0,937	5,5	0,995
80	0,174	**65**	0,423	**50**	0,643	**35**	0,819	**20**	0,940	**5**	0,996
79,5	0,182	64,5	0,431	49,5	0,649	34,5	0,824	19,5	0,943	4,5	0,997
79	0,191	64	0,438	49	0,656	34	0,829	19	0,946	4	0,998
78,5	0,199	63,5	0,446	48,5	0,663	33,5	0,834	18,5	0,948	3,5	0,998
78	0,208	63	0,454	48	0,669	33	0,839	18	0,951	3	0,999
77,5	0,216	62,5	0,462	47,5	0,676	32,5	0,843	17,5	0,954	2,5	0,999
77	0,225	62	0,469	47	0,682	32	0,848	17	0,956	2	0,999
76,5	0,233	61,5	0,477	46,5	0,688	31,5	0,853	16,5	0,959	1,5	1,000
76	0,242	61	0,485	46	0,695	31	0,857	16	0,961	1	1,000
75,5	0,250	60,5	0,492	45,5	0,701	30,5	0,862	15,5	0,964	0,5	1,000

2. Die übrigen Funktionen.

12. *Vorbemerkung.* — Im rechtwinkligen Dreieck (Fig. 1) lassen sich im Ganzen sechs Seitenverhältnisse aufstellen, nämlich:

Fig. 1.



$$\frac{b}{c}, \frac{a}{c}, \frac{a}{b}; \quad \frac{c}{b}, \frac{c}{a}, \frac{b}{a}.$$

Von diesen ist bis jetzt das erste, $\frac{b}{c}$, als Funktion des Winkels α nachgewiesen und bezeichnet worden. Dasselbe soll im Folgenden mit den übrigen Verhältnissen geschehen.

13. a) *Der Sinus.* — Nach der Definition des Cosinus ist $\frac{a}{c} = cos\,\beta$. Nun ist nach 4 $cos\,\beta$ oder $\frac{a}{c}$ eine Funktion von $cos\,\alpha$, also auch von α. (Nr. 1 am Schluss.)

Erklärung. — Unter dem Sinus (*sin*) eines spitzen Winkels α im rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältniss der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete a zur Hypotenuse c.

$$sin\,\alpha = \frac{a}{c}.$$

b) *Die Tangens.* — Da $\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$, so ist auch $\frac{a}{b}$ eine Funktion von α.

Erklärung. — Unter der Tangens (*tg*) eines spitzen Winkels α im rechtwinkligen Dreieck versteht man das Verhältniss der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete a zur anliegenden Kathete b.

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b}.$$

c) *Die Secans, Cosecans, Cotangens.* — Wie $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{c}$ und $\frac{a}{b}$, so sind auch die umgekehrten Werthe dieser Brüche, nämlich $\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}$ und $\frac{b}{a}$, Funktionen von α.

Erklärungen. — Unter der Secans (*sec*) eines spitzen Winkels α versteht man den umgekehrten Werth seines Cosinus; unter der Cosecans (*cosec*) den umgekehrten Werth

seines Sinus; unter der Cotangens (*cot*) den umgekehrten Werth seiner Tangens.

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha} = \frac{c}{b}.$$

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha} = \frac{c}{a}.$$

$$cot\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{b}{a}.$$

Anm. Wie lauten also die Erklärungen dieser drei Funktionen durch die Seitenverhältnisse in Worten?

Uebersicht der sechs Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck, und der durch sie dargestellten Funktionen des Winkels α.

$sin\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$cot\,\alpha$	$sec\,\alpha$	$cosec\,\alpha$
$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{c}{a}$

9.

14. *Eintheilung der Funktionen nach ihrem Zusammenhange.* — a) *Coordinirte Funktionen.* — Aus den Definitionen der sechs Funktionen (oder wenn man im Dreieck $\overline{ABC}$ oder in 9 gleichzeitig a mit b, und α mit β vertauscht), folgt:

$$sin\,\beta = \frac{b}{c} = cos\,\alpha; \quad tg\,\beta = \frac{b}{a} = cot\,\alpha; \quad sec\,\beta = \frac{c}{a} = cosec\,\alpha;$$

$$cos\,\beta = \frac{a}{c} = sin\,\alpha; \quad cot\,\beta = \frac{a}{b} = tg\,\alpha; \quad cosec\,\beta = \frac{c}{b} = sec\,\alpha.$$

Vermöge dieses Zusammenhanges heissen Sinus und Cosinus einander coordinirt; ebenso Tangens und Cotangens, Secans und Cosecans. Und die letzten Formeln enthalten zusammen den Satz:

Jede Funktion eines spitzen Winkels ist gleich der coordinirten Funktion seines Complementwinkels. 10.

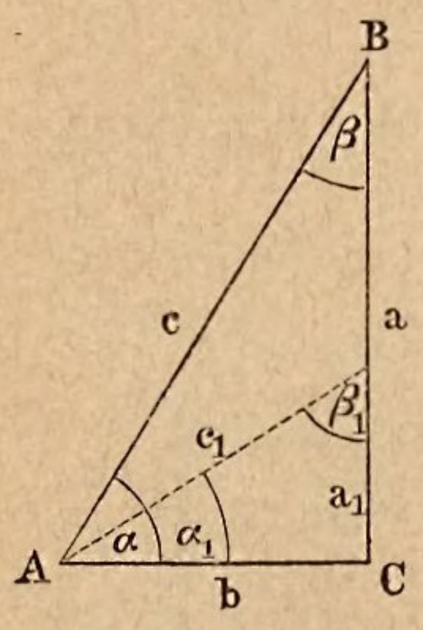
Anm. Hiernach zerfallen die sechs Funktionen in drei Paare coordinirter Funktionen. — In der Uebersicht 9 ist jedes der drei Paare von dem folgenden durch einen Doppelstrich getrennt.

b) *Reciproke Funktionen.* — Zwei Funktionen heissen reciprok zu einander, wenn die eine der umgekehrte Werth der andern ist. Demnach sind reciprok: Sinus und Cosecans, Cosinus und Secans, Tangens und Cotangens.

Anm. Hierdurch zerfallen die sechs Funktionen in drei Paare reciproker Funktionen. In der Uebersicht 9 stehen die beiden Funktionen jedes dieser Paare einander symmetrisch gegenüber. — Tangens und Cotangens sind gleichzeitig reciprok und coordinirt. — Man übe sich, zu jeder gegebenen Funktion die coordinirte und die reciproke anzugeben.

15. *Eintheilung der Funktionen nach ihrem Wachsthum.* — In Nr. 7 wurde gezeigt, dass, wenn im rechtwinkligen Dreieck (Fig. 1) der Winkel α bis α_1 abnimmt, während b ungeändert bleibt, zwischen den Seiten der Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ die Beziehungen bestehen:

Fig. 1.



$$1)\quad a_1 < a;\ c_1 < c.$$

Ausserdem ist

$$2)\quad \alpha_1 < \alpha;\ \beta < \beta_1.$$

Aus 1) folgt:

$$\frac{a_1}{b} < \frac{a}{b};\ \frac{b}{a_1} > \frac{b}{a};\ \frac{c_1}{b} < \frac{c}{b};\ \frac{b}{c_1} > \frac{b}{c};$$

oder (9)

$$3)\quad tg\,\alpha_1 < tg\,\alpha;\ cot\,\alpha_1 > cot\,\alpha;\ sec\,\alpha_1 < sec\,\alpha;\ cos\,\alpha_1 > cos\,\alpha.$$

Ferner ist nach 10

$$cosec\,\beta = sec\,\alpha;\quad sin\,\beta = cos\,\alpha;$$
$$cosec\,\beta_1 = sec\,\alpha_1;\ sin\,\beta_1 = cos\,\alpha_1;$$

also nach 3)

$$4)\quad cosec\,\beta > cosec\,\beta_1;\ sin\,\beta < sin\,\beta_1.$$

Aus den Formeln 2), 3), 4) folgt nun, dass zu dem kleineren von zwei Winkeln die kleinere Sinus-, Tangens- und Secans-Funktion, aber die grössere Cosinus-, Cotangens-, und Cosecans-Funktion gehört. Oder: wenn der Winkel abnimmt, so nehmen die ersteren Funktionen ab, die letzteren zu.

Vermöge dieses Zusammenhanges heissen Sinus, Tangens, Secans, welche sich mit dem zugehörigen Winkel in gleichem Sinne ändern, zusammen directe Funktionen; dagegen Cosinus, Cotangens, Cosecans, welche sich mit dem zugehörigen Winkel in entgegengesetztem Sinne ändern, indirecte Funktionen (Cofunktionen). — Man kann demnach das letzte Resultat in der Form aussprechen:

11. Nimmt ein spitzer Winkel zu, so nehmen seine directen Funktionen zu, seine indirecten ab.

Anm. Hiernach zerfallen die sechs Funktionen in zwei Tripel. — In der Uebersicht 9 stehen die directen Funktionen an ungerader, die indirecten an gerader Stelle. — Man gebe den gemeinsamen Namen von zwei beliebig gewählten Funktionen an. Welche Paare lassen sich unter keinen gemeinsamen Namen bringen?

16. *Die Grenzwerthe der Funktionen eines spitzen Winkels.* — a) Nimmt im rechtwinkligen Dreieck der Winkel α bis 0 ab, während b ungeändert bleibt, so wird $a = 0$, $c = b$. Dann folgt aus 9:

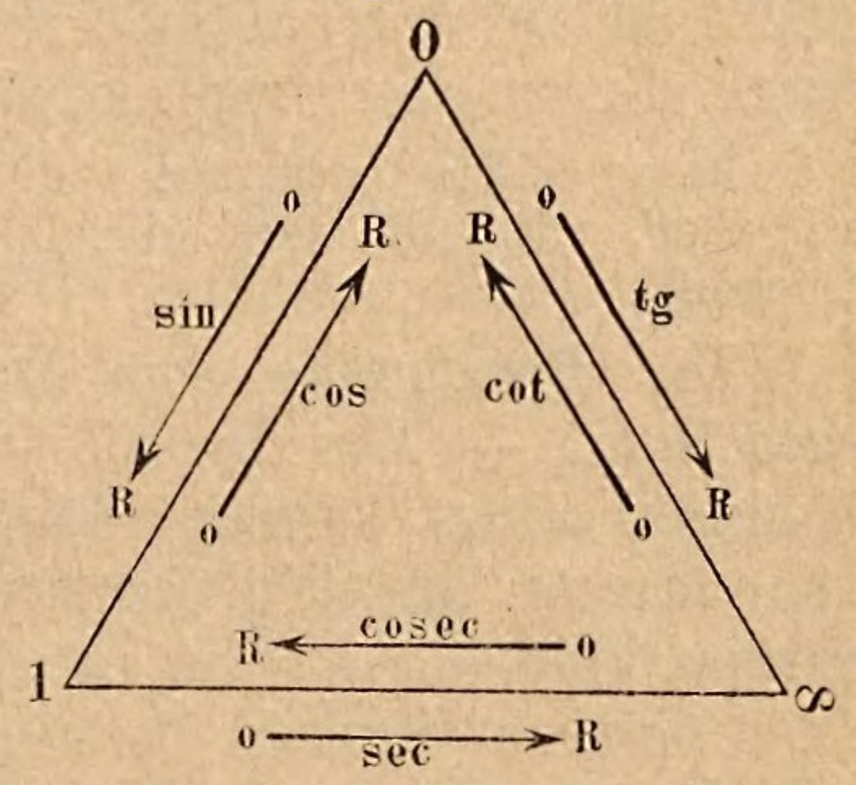
$$\begin{aligned} &\sin 0 = 0; \quad tg\, 0 = 0; \qquad \sec 0 = 1; \\ &\cos 0 = 1; \quad \cot 0 = \infty; \quad \operatorname{cosec} 0 = \infty. \end{aligned} \qquad 12.$$

b) Nimmt dagegen der Winkel α bis R zu, so rückt B auf CB (Fig. 1) in unendliche Entfernung, a und c wachsen ins Unendliche, und ihr Verhältniss nähert sich der Einheit als Grenze. Dann folgt aus 9:

$$\begin{aligned} &\sin R = 1; \quad tg\, R = \infty; \quad \sec R = \infty; \\ &\cos R = 0; \quad \cot R = 0; \quad \operatorname{cosec} R = 1. \end{aligned} \qquad 13.$$

Aus der Vergleichung von 12 und 13 folgt, dass der Satz 10 auch noch für die Funktionen der Grenzwinkel 0 und R gilt. Ferner folgt, dass für einen spitzen Winkel stets Sinus und Cosinus zwischen 0 und 1, Tangens und Cotangens zwischen 0 und ∞, Secans und Cosecans zwischen 1 und ∞ liegen. Diese Beziehungen sind durch Fig. 3 veranschaulicht.

Fig. 3.



Anm. In nebenstehender Figur drücken die Richtungen jedes Pfeiles die Aenderungen eines Winkels von 0 bis R aus, und die gleiche Richtung der parallelen Dreiecksseite drückt die gleichzeitige Aenderung der neben dem Pfeile stehenden Funktion aus.

17. *Bestimmung von Winkeln und Funktionen durch einander.* — Aus den oben gegebenen Definitionen der trigonometrischen Funktionen folgt, dass der Werth jeder Funktion durch den gegebenen Winkel vollständig bestimmt ist. Aber auch umgekehrt ist die Grösse eines Winkels durch einen zugehörigen Funktionswerth vollständig bestimmt. Denn wenn zu einem gegebenen Funktionswerthe zwei verschiedene Winkel gehörten, so widerspräche dies dem Satze 11, nach welchem, wenn einer dieser Winkel in den andern übergeht, auch der zugehörige Funktionswerth beständig grösser oder beständig kleiner werden muss, also jedenfalls die ursprüngliche Grösse nicht wieder annehmen kann.

Wie jede Funktion durch den zugehörigen Winkel, so ist auch jede Funktion eines Winkels durch eine andere Funktion

desselben Winkels vollständig bestimmt, und kann durch sie ausgedrückt werden. Dies geschieht mit Hilfe der folgenden Formeln:

Nach 4 ist $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$;

nach 10: $\cos \beta = \sin \alpha$,

14. folglich: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Ferner folgt aus 9:

15. $$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = tg\, \alpha.$$

a) Mittelst der Formeln 14 und 15 kann nun jede der drei Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens durch eine der beiden anderen ausgedrückt werden. b) Ebenso jede der drei Funktionen Cosecans, Secans, Cotangens durch eine der beiden andern, wenn man in 14 und 15 jede Funktion durch die zu ihr reciproke ausdrückt. c) Endlich jede der drei ersten (letzten) Funktionen durch jede der drei letzten (ersten), wenn man in jeder der in a) erhaltenen Formeln eine der beiden Funktionen durch die zu ihr reciproke ausdrückt.

Anm. Man bestimme die Anzahl aller dieser Formeln, und löse Aufgaben, wie: Die fünf übrigen Funktionen durch den Cosinus auszudrücken.

18. *Berechnung von Funktionen spitzer Winkel. — Vorbemerkung.* — Aus Nr. 17 folgt, dass, wenn der Werth einer Funktion eines spitzen Winkels (z. B. des Cosinus) bekannt ist, daraus die Werthe aller übrigen Funktionen berechnet werden können. — Um nun den Werth irgend einer Funktion eines spitzen Winkels berechnen zu können, muss dieser Winkel einem rechtwinkligen Dreieck angehören, in welchem eine Seite allein durch eine zweite (ohne Benutzung der dritten) ausgedrückt werden kann. Denn nur dann wird das Verhältniss dieser Seiten eine blosse Zahl sein. Diese Bedingung erfüllen aber nur diejenigen rechtwinkligen Dreiecke, welche Hälften von Bestimmungsdreiecken in elementar construirbaren regelmässigen Polygonen sind. Denn nach Th. II Nr. 156—160 lassen sich die Katheten $\frac{s_n}{2}$ dieser rechtwinkligen Dreiecke allein durch die Hypotenuse r ausdrücken. — Es sind für diesen Zweck nur noch die Bestimmungsdreiecke des regelmässigen Vierecks und Zehnecks zu betrachten, da dasjenige des Sechsecks bereits oben (Formel 8) den $\cos 60^0$ geliefert hat, und das des Fünfzehnecks Winkel enthält, für

welche zunächst der Cosinus besser mittelst der Formeln 5 und 7 bestimmt wird. Diese letzteren Formeln machen auch die Betrachtung der aus dem 6-, 4-, 10- und 15-Eck ableitbaren Polygone überflüssig.

a) *Funktionen des Winkels von 60°.* — Nach Formel 8 ist

$$\cos 60^0 = \tfrac{1}{2}.$$

b) *Funktionen des Winkels von 45°.* — Das Bestimmungsdreieck des Quadrates ist gleichschenklig-rechtwinklig, also $a = b$. Dann folgt aus 9:

$$tg\, 45^0 = 1. \qquad 16.$$

c) *Funktionen des Winkels von 72°.* — Ist x die Seite des regelmässigen Zehnecks, und r der Radius des umbeschriebenen Kreises, so ist (Th. II, 368)

$$x^2 = r(r - x),$$

woraus folgt:

$$x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Fällt man nun im Bestimmungsdreieck des regelmässigen Zehnecks die Höhe auf die Basis, so ist

$$\cos 72^0 = \frac{x}{2r},$$

oder, wenn man x durch seinen eben gefundenen Werth ersetzt:

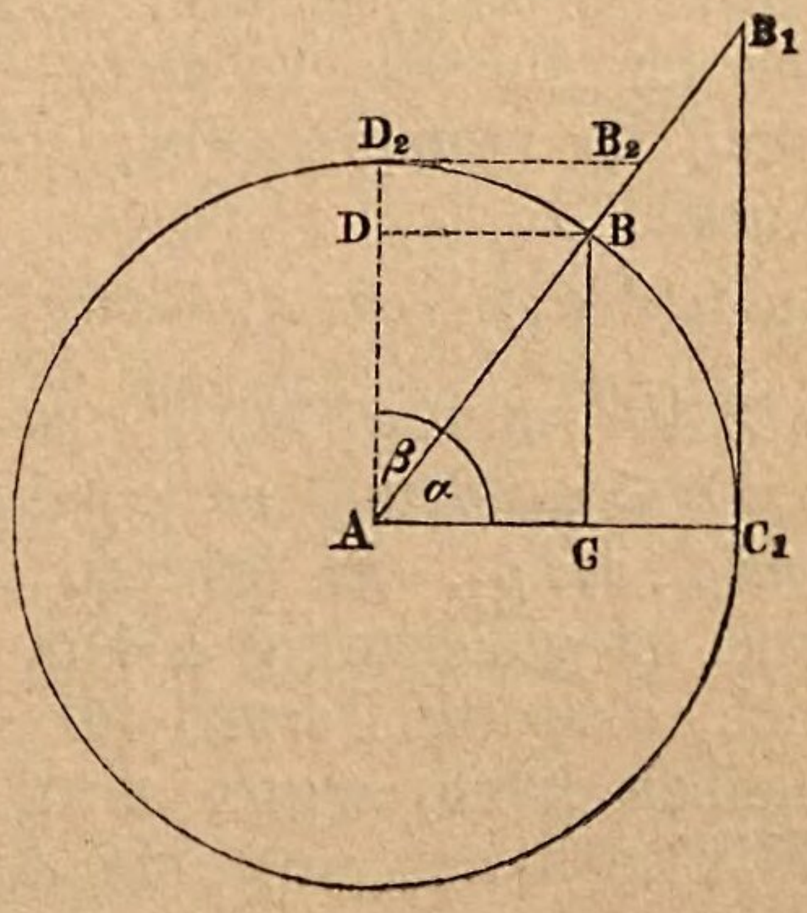
$$\cos 72^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}. \qquad 17.$$

Anm. Man berechne a) die übrigen Funktionen der Winkel von 60^0, 45^0, 72^0, b) den Cosinus und die übrigen Funktionen der Winkel von 30^0, 15^0, 36^0, 18^0, 9^0, c) den Cosinus und die übrigen Funktionen solcher spitzer Winkel, die aus den angegebenen durch Addition entstehen.

19. *Geometrische Darstellung der Funktionen eines spitzen Winkels.* — Beschreibt man aus der Ecke A eines bei C rechtwinkligen Dreiecks $\overline{ABC}$ eine Kreislinie mit der Hypotenuse AB als Radius, und setzt $AB = 1$, so ist (Fig. 4)

$$1)\quad \sin\alpha = \frac{BC}{AB} = BC.$$

Fig. 4.



Verlängert man AC bis C_1, und AB bis zum Schnittpunkte B_1 mit der in C_1 gezogenen Tangente, so ist $\overline{ABC} \sim \overline{AB_1C_1}$ (Th. II, 245), und

$$2) \quad tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = B_1C_1.$$

$$3) \quad sec\,\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = AB_1.$$

Führt man dieselben Constructionen in Bezug auf β, den Complementwinkel von α, aus, so erhält man mit Berücksichtigung von 10:

$$4) \quad cos\,\alpha = sin\,\beta = \frac{BD}{AB} = BD.$$

$$5) \quad cot\,\alpha = tg\,\beta = \frac{BD}{AD} = \frac{B_2D_2}{AD_2} = B_2D_2.$$

$$6) \quad cosec\,\alpha = sec\,\beta = \frac{AB}{AD} = \frac{AB_2}{AD_2} = AB_2.$$

Anm. Aus dem Umstande, dass bei dieser geometrischen Darstellung der Funktionen die Strecken B_1C_1 und B_2D_2 Tangenten, dagegen AB_1 und AB_2 Secanten der Kreislinie sind, erklären sich die Namen der Funktionen Tangens und Secans, sowie Cotangens und Cosecans (tangens, secans complementi). Die Bedeutung des Namens sinus s. im Register.

II. Funktionen beliebiger Winkel.

1. Der Cosinus.

20. *Vorbemerkung.* — Um den Begriff des Cosinus auf beliebige Winkel ausdehnen zu können, muss eine neue Definition dieser Funktion aufgestellt werden. Diese Definition muss erstens, damit kein Widerspruch entsteht, die früher für den spitzen Winkel gegebene als speciellen Fall in sich schliessen. Zweitens kann man verlangen, dass die für die Cosinus spitzer Winkel geltenden Formeln 4 und 5 auch für stumpfe Winkel in Geltung bleiben. Ist nun in der Formel 5

$$cos\,(\alpha + \alpha_1) = cos\,\alpha \,.\, cos\,\alpha_1 - cos\,\beta \,.\, cos\,\beta_1 \quad (\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 = R)$$

$\alpha > 45^0$ und $\alpha_1 > 45^0$, so ist $\beta < 45^0$ und $\beta_1 < 45^0$; mithin $cos\,\alpha < cos\,\beta$ und $cos\,\alpha_1 < cos\,\beta_1$ (11), folglich $cos\,\alpha \,.\, cos\,\alpha_1 < cos\,\beta \,.\, cos\,\beta_1$. Es ist also $cos\,(\alpha + \alpha_1)$ in diesem Falle negativ, und da gleichzeitig $\alpha + \alpha_1$ ein stumpfer Winkel ist, so zeigt sich, dass die Formel für stumpfe Winkel nur dann in Geltung bleiben kann, wenn man den Cosinus eines stumpfen Winkels als negativ ansieht. (Die Formel 4 wird sich

später als specieller Fall von 5 ausweisen; daher braucht hier ihr Weiterbestehen nicht untersucht zu werden.)

Um die erste Forderung zu erfüllen, machen wir die beiden Schenkel eines beliebigen Winkels α einander gleich ($SA = SB$, Fig. 5), projiciren einen Schenkel SB (den Endschenkel) auf den anderen SA (den Anfangsschenkel), und verstehen unter dem Cosinus des Winkels α den Quotienten aus dieser Projection SB_1 und dem Anfangsschenkel SA.

Fig. 5a.

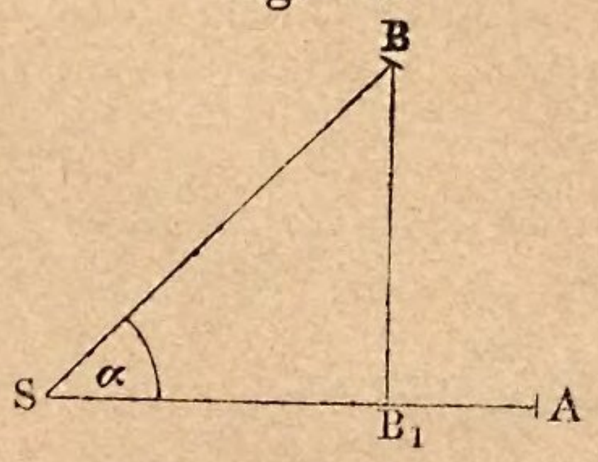
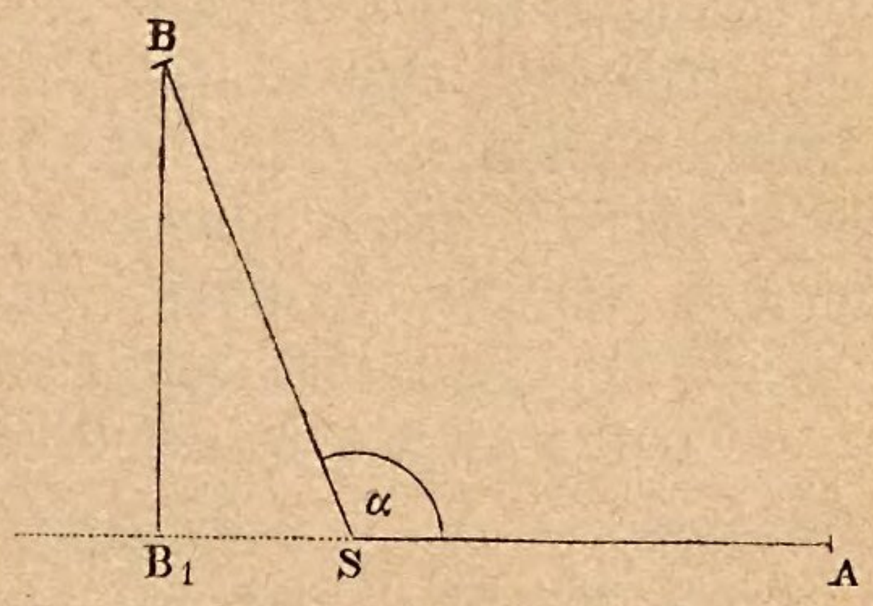


Fig. 5b.



Anm. Im spitzwinkligen Dreieck SBB_1 (Fig. 5a) würde nach der früheren Definition $\cos\alpha = \frac{SB_1}{SB}$ sein. Da nun $SB = SA$ ist, so sieht man, wie für spitze Winkel die neue Definition mit der alten übereinstimmt.

Um die zweite Forderung zu erfüllen, bezeichnen wir den Quotienten $\frac{SB_1}{SA}$ als positiv, wenn die Strecken SB_1 und SA gleiche, als negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben.

Anm. Die Darstellung des Gegensatzes der Richtungen auf einer Geraden durch positive und negative Zahlen ist bereits in Th. II, Nr. 22 und 23 ausgeführt worden. Ebenso die Lehre von der Projection mit Berücksichtigung dieses Gegensatzes in Th. II, Nr. 140. — Aus Fig. 5b ist ersichtlich, dass bei Berücksichtigung dieses Gegensatzes der Cosinus des stumpfen Winkels α in der That, wie verlangt, durch eine negative Zahl ausgedrückt wird. — Zu beachten ist, dass bei dieser neuen Auffassung des Streckenbegriffs, durch welche die Richtung der Strecke als wesentliches Unterscheidungsmerkmal herangezogen wird, nur Quotienten von Strecken auf derselben oder auf parallelen Geraden die Bedeutung einer reellen Zahl haben (vgl. Th. II, Nr. 34). Solche Quotienten werden daher auch im Folgenden ausschliesslich benutzt.

21. *Erklärung.* — Unter dem Cosinus eines beliebigen Winkels α, dessen Schenkel gleich lang gemacht sind, versteht man die Projection des einen Schenkels auf den andern, dividirt durch den andern.

$$\cos\alpha = \frac{SB_1}{SA} \text{ (Fig. 5).}$$

Anm. Die Grösse des Verhältnisses $\frac{SB_1}{SA}$, also des $\cos\alpha$, ist von der

Länge der auf den Schenkeln abgetragenen Strecke unabhängig. Denn sei $SA^1 = SB^1$ eine andere auf den Schenkeln abgetragene Strecke, und $SB_1{}^1$ die Projection von SB^1 auf SA^1, so ist $\frac{SB_1{}^1}{SB_1{}^1} = \frac{SB_1}{SB}$ (Th. II, 349) $= \frac{SA^1}{SA}$, also: $\frac{SB_1{}^1}{SA^1} = \frac{SB_1}{SA}$. — Die Grösse des $\cos\alpha$ ist aber auch von der Wahl des zu projicirenden Schenkels unabhängig. Denn ist SA_1 die Projection von SA auf SB (Fig. 5), so ist $\overline{SBB_1} \sim \overline{SAA_1}$, also $SA_1 = SB_1$, und $\frac{SA_1}{SB} = \frac{SB_1}{SA} = \cos\alpha$.

Da die Definition des Cosinus eines Winkels nur die Richtung seiner Schenkel berücksichtigt, nicht aber die Grösse der Drehung, durch welche ein Schenkel in die Richtung des andern gelangen kann, so sind die Cosinus aller Winkel, welche dieselben Schenkel haben, oder deren Schenkel sich zur Deckung bringen lassen, einander gleich. Nennt man solche Winkel congruent, so gilt demnach der Satz:

18. Congruente Winkel haben gleiche Cosinus.

oder:
$$\cos(4nR \pm \alpha) = \cos\alpha,$$

wobei n die Null und alle ganzen Zahlen bedeutet.

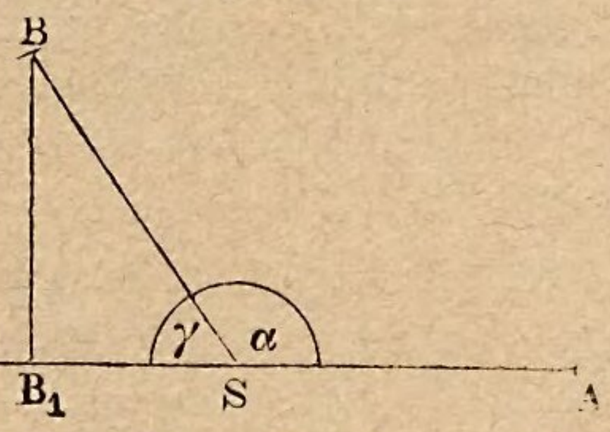
Anm. Die verschiedenen Bedeutungen eines durch seine Schenkel gegebenen Winkels sind in Th. II, Nr. 33 erste Anm., Nr. 44 letzte Anm. auseinandergesetzt. — Congruent sind demnach insbesondere 1) zwei Winkel, die sich nur um eine ganze Anzahl von Umdrehungen unterscheiden (α und $4nR + \alpha$), 2) zwei Winkel, die zusammen $4R$ betragen (α und $4R - \alpha$), 3) zwei Winkel, die sich nur durch den Sinn der Drehung unterscheiden ($+\alpha$ und $-\alpha$). — Man sieht, dass alle diese Winkel in dem Ausdrucke $4nR \pm \alpha$ enthalten sind.

Aus 18 folgt u. a. für $n = 0$ und das untere Zeichen von α:

19.
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

22. *Die Cosinus von Supplementwinkeln.* — Sind α und γ (Fig. 6) zwei Nebenwinkel, so ist

Fig. 6.



20.
$$\cos\alpha = \frac{SB_1}{SA}, \quad \cos\gamma = \frac{SB_1}{SC},$$

oder, da $SC = -SA$ ist:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha,$$

oder: $\cos(2R - \alpha) = -\cos\alpha$.

23. *Die Cosinus der Grenzwinkel $2R$, $3R$, $4R$.* — Setzt man in 20 $\alpha = 0$, so folgt

$$\cos 2R = -\cos 0 = -1. \quad (2)$$

Da ferner der Winkel $2R$ congruent mit R ist, so ist nach 18

$$\cos 3R = \cos R = 0. \quad (3)$$

Da endlich der Winkel $4R$ congruent mit 0 ist, so ist nach 18

$$cos\, 4R = cos\, 0 = +1. \quad (2)$$

Also, zusammengestellt:

cos	0,	R,	$2R$,	$3R$	$4R$ ...
=	+1,	0,	−1,	0	+1 ...

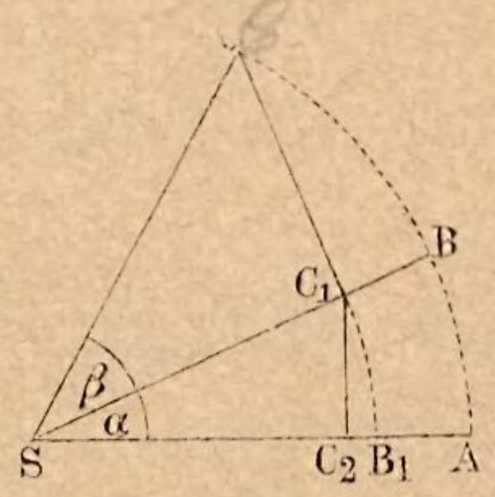
21.

Nennt man die Winkel zwischen 0 und R, R und $2R$, $2R$ und $3R$, $3R$ und $4R$ bezw. die Winkel im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten, so folgt aus 21:

22. Der Cosinus eines Winkels ist im *ersten* und *vierten* Quadranten *positiv*, im *zweiten* und *dritten negativ*. — Der Cosinus eines Winkels nimmt zwischen +1 und −1 im *ersten* und *zweiten* Quadranten *ab*, im *dritten* und *vierten zu*.

24. *Product zweier Cosinus.* — Aus einem Punkte S seien drei gleichlange Strecken gezogen, SC, SB, SA. Projicirt man nun SC auf SB, und diese Projection wieder auf SA, so ist, wenn $BSC = \beta$ und $ASB = \alpha$ gesetzt wird (Fig. 7):

Fig. 7a.



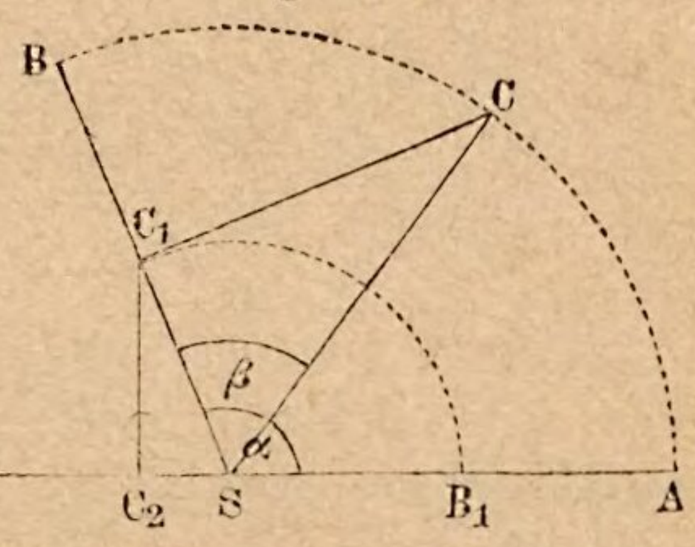
$$cos\, \beta = \frac{SC_1}{SB} = \frac{SB_1}{SA};$$

$$cos\, \alpha = \frac{SC_2}{SB_1};$$

daher durch Multiplication:

$$cos\, \alpha \,.\, cos\, \beta = \frac{SC_2}{SA}.$$

Fig. 7b.



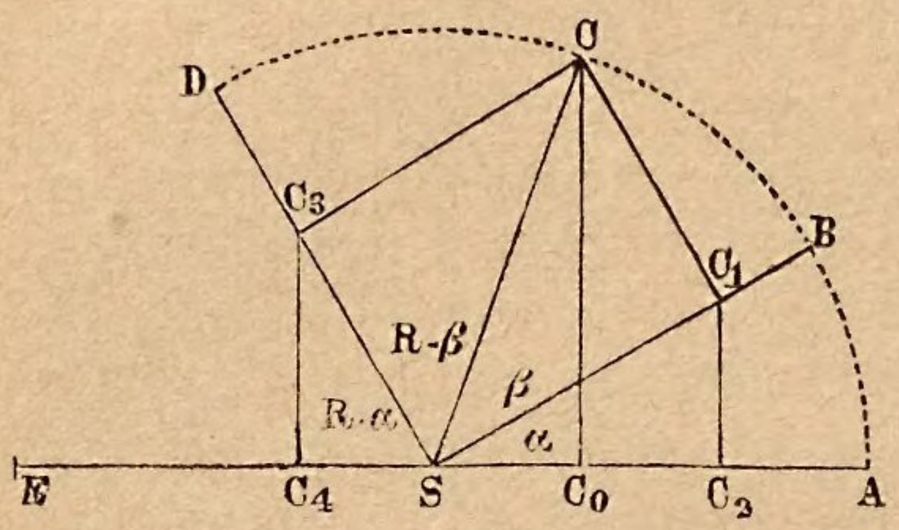
23. In Worten: Projicirt man von drei aus einem Punkte gehenden Strecken die erste auf die zweite, und diese Projection auf die dritte, so ist die letzte Projection, dividirt durch die dritte Strecke, gleich dem Producte der Cosinus der beiden Zwischenwinkel.

Anm. Fig. 7a zeigt die Construction, wenn beide Zwischenwinkel spitz sind, Fig. 7b, wenn einer derselben stumpf ist. — Der Satz 23 lässt sich auch auf mehr als zwei Winkel ausdehnen

25. *Cosinus der Summe zweier Winkel.* — Um den Cosinus der Summe zweier beliebiger Winkel $ASB = \alpha$ und $BSC = \beta$ (Fig. 8) durch die Cosinus von α und β auszudrücken, verlängert man AS, errichtet $SD \perp SB$, macht $SA = SB = SC = SD$,

und erhält so die Winkel $CSD = R - \beta$ und $DSE = R - \alpha$ (Th. II, 58). — Projicirt man dann, wie in der vorigen Nr., SC auf SB, SC_1 auf SA; ferner SC auf SD, SC_3 auf SA, endlich SC auf SA, so ist

Fig. 8.



1) $cos\,(\alpha + \beta) = \dfrac{SC_0}{SA}$.

Nun ist

2) $SC_0 = SC_2 + C_2C_0$ (Th. II, 23).

Da ferner $\overline{SC_1CC_3}$ ein Rechteck ist (drei Winkel sind R!), so ist $C_1C \fallingdotseq SC_3$, also besteht zwischen den Projectionen C_2C_0 und SC_4 dieser Strecken die Beziehung:

3) $C_2C_0 = SC_4$ (Th. II, 349).

Demnach ist, wenn man 3) in 2) einsetzt:

$$SC_0 = SC_2 + SC_4,$$

und dies in 1) eingesetzt, giebt:

4) $cos\,(\alpha + \beta) = \dfrac{SC_2}{SA} + \dfrac{SC_4}{SA}$.

Nun ist nach 23:

5) $\dfrac{SC_2}{SA} = cos\,\alpha \,.\, cos\,\beta$;

$$\frac{SC_4}{SA} = cos\,CSD \,.\, cos\,DSA = cos\,(R-\beta) \,.\, cos\,(R+\alpha),$$

oder, da $R + \alpha$ und $R - \alpha$ Supplementwinkel sind, und in Folge dessen nach 20

23a. $$cos\,(R + \alpha) = -\,cos\,(R - \alpha)$$

ist, 6) $\dfrac{SC_4}{SA} = -\,cos\,(R-\beta) \,.\, cos\,(R-\alpha)$.

Setzt man endlich 5) und 6) in 4) ein, so folgt:

24. $$cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\alpha \,.\, cos\,\beta - cos\,(R-\alpha) \,.\, cos\,(R-\beta).$$

Anm. Die Ableitung dieser Formel bleibt ungeändert, wie auch die Winkel α und β beschaffen sein mögen. — Der Vergleich mit 5 zeigt, dass letztere Formel in der That, wie verlangt wurde, nunmehr für beliebige Winkel gilt. Dasselbe findet natürlich für die aus 5 abgeleiteten Formeln 6 und 7 statt. Uebrigens wird Formel 24 ihre definitive Gestalt erst mit Hilfe des Sinus-Begriffes erhalten.

2. Die übrigen Funktionen.

26. *Vorbemerkung.* — Wie der Begriff des Cosinus, so bedürfen auch diejenigen der übrigen Funktionen einer Erweiterung, und zwar einer solchen, welche ihre Beziehungen zum Cosinus unverändert lässt. Wir definiren daher die übrigen Funktionen mit Hilfe des Cosinus, und erreichen dadurch ausserdem den Vortheil, dass ihre Eigenschaften sich aus denen des Cosinus durch blosse Rechnung ableiten lassen.

27. *Erklärungen.* — a) Unter dem Sinus eines beliebigen Winkels α versteht man den Cosinus seines Complementwinkels.

$$sin\ \alpha = cos\ (R - \alpha). \qquad 25.$$

b) Unter der Tangens eines beliebigen Winkels versteht man den Quotienten zwischen Sinus und Cosinus des Winkels.

$$tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}. \qquad 26.$$

c) Unter Secans, Cosecans, Cotangens eines beliebigen Winkels α versteht man bezw. die reciproken Werthe von Cosinus, Sinus, Tangens des Winkels.

$$sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha};\quad cosec\ \alpha = \frac{1}{sin\ \alpha};\quad cot\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}. \qquad 27.$$

Anm. Mit Hilfe der Formeln 25, 26, 27 lassen sich alle übrigen Funktionen durch den Cosinus allein ausdrücken. — Unter den Eigenschaften der Funktionen werden künftig in der Regel nur diejenigen von *cos*, *sin* und *tg* berücksichtigt werden, da mittelst 27 die Eigenschaften der drei übrigen Funktionen sich leicht aus jenen ableiten lassen.

28. *Beziehungen zwischen den Funktionen zweier von einander abhängiger Winkel.* —

a) *Complementwinkel.* — Den Cosinus des Complementwinkels giebt 25. Den Sinus erhält man, wenn man in 25 $(R - \alpha)$ für α setzt, die Tangens aus beiden Funktionen nach 26. — So folgt:

$$cos\ (R - \alpha) = sin\ \alpha;\quad sin\ (R - \alpha) = cos\ \alpha;\quad tg\ (R - \alpha) = cot\ \alpha. \qquad 28.$$

Vervollständigt man diese Formeln mittelst 27, so erkennt man, dass der Satz 10 auch für beliebige Winkel gilt.

b) *Supplementwinkel.* — Den Cosinus des Supplementwinkels giebt 20. Den Sinus erhält man, wenn man in 25 $(2R - \alpha)$ für α setzt, die Tangens aus 26. — So folgt:

$$sin\ (2R - \alpha) = cos\ [R - (2R - \alpha)] = cos\ (\alpha - R)$$
$$= cos\ (R - \alpha)\ \text{(nach 19)} = sin\ \alpha\ \text{(nach 25)}.$$

Also:

29. $cos\,(2R - \alpha) = -\,cos\,\alpha$; $sin\,(2R - \alpha) = sin\,\alpha$; $tg\,(2R - \alpha) = -\,tg\,\alpha$.

Supplementwinkel haben gleiche Sinus, aber entgegengesetzte Cosinus.

c) *Entgegengesetzte Winkel.* — Den Cosinus des entgegengesetzten Winkels giebt 19. Den Sinus erhält man, wenn man in 25 $(-\alpha)$ für α setzt, die Tangens aus 26. — So folgt:

$$sin\,(-\alpha) = cos\,(R + \alpha) = -\,cos\,(R - \alpha) \text{ (nach 23a)}$$
$$= -\,sin\,\alpha \text{ (nach 25).}$$

Also:

30. $cos\,(-\alpha) = cos\,\alpha$; $sin\,(-\alpha) = -\,sin\,\alpha$; $tg\,(-\alpha) = -\,tg\,\alpha$.

Entgegengesetzte Winkel haben entgegengesetzte Sinus, aber gleiche Cosinus.

29. *Funktionen der Grenzwinkel 2R, 3R, 4R.* — Die Cosinus der Grenzwinkel giebt 21. Hieraus erhält man die übrigen Funktionen mittelst 25—27. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

31.

	sin	*cos*	*tg*	*cot*	*sec*	*cosec*
0	0	+1	0	$+\infty$	+1	$\mp\infty$
R	+1	0	$+\infty$	0	$\pm\infty$	+1
$2R$	0	−1	0	$-\infty$	−1	$\pm\infty$
$3R$	−1	0	$-\infty$	0	$\mp\infty$	−1
$4R$	0	+1	0	$+\infty$	+1	$\mp\infty$

Anm. Die Bestimmung des Vorzeichens von ∞ bei den beiden letzten Funktionen erfolgt durch die Bemerkung, dass der Uebergang der Funktion aus dem Positiven ins Negative durch den Werth ∞ hindurch stattfindet (bei den übrigen Funktionen erfolgt er durch 0 hindurch. Vgl. Th. II, S. 43 unten!)

30. *Funktionen der Summe und der Differenz zweier Winkel.* — a) Ersetzt man in 24 die Cosinus der Complementwinkel (nach 25) durch die Sinus der Winkel, so folgt:

32. $$cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\alpha \,.\, cos\,\beta - sin\,\alpha \,.\, sin\,\beta.$$

b) Es ist

33. $cos\,(\alpha - \beta) = cos\,[\alpha + (-\beta)] = cos\,\alpha \,.\, cos\,(-\beta) - sin\,\alpha \,.\, sin\,(-\beta)$; (32)

oder: $cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha \,.\, cos\,\beta + sin\,\alpha \,.\, sin\,\beta$. (30)

c) Es ist

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos[(R-\alpha)-\beta] \quad (25)$$
$$= \cos(R-\alpha)\,.\,\cos\beta + \sin(R-\alpha)\,.\,\sin\beta; \quad (33)$$

oder:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,.\,\cos\beta + \cos\alpha\,.\,\sin\beta. \quad (28) \qquad 34.$$

d) Es ist

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha+(-\beta)] = \sin\alpha\,.\,\cos(-\beta) + \cos\alpha\,.\,\sin(-\beta); \quad (34)$$

oder:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,.\,\cos\beta - \cos\alpha\,.\,\sin\beta. \quad (30) \qquad 35.$$

e) Dividirt man 34 durch 32, und dividirt rechts jedes Glied des Zählers und des Nenners durch $\cos\alpha\,.\,\cos\beta$, so folgt nach 26:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}. \qquad 36.$$

f) Dividirt man 35 durch 33, und verfährt wie in e), so folgt:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta}. \qquad 37.$$

Specieller Fall. — Setzt man in 33 $\alpha=\beta$, so folgt mit Rücksicht auf 21:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \qquad 38.$$

Anm. Es gilt also Formel 14 auch für beliebige Winkel. — Die Substitution $\alpha=\beta$, auf 35 und 37 angewendet, giebt das Resultat $0=0$. — Dieselbe Substitution wird in der folgenden Nr. auf die Formeln 32, 34, 36 angewendet werden.

31. *Funktionen des Doppelten eines Winkels.* — Setzt man in den Formeln 32, 34, 36 $\alpha=\beta$, so folgt:

a) $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad 39.$$

oder mit Benutzung von 38:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \qquad 39a.$$

b) $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,.\,\cos\alpha. \qquad 40.$$

c) $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad 41.$$

32. *Funktionen der Hälfte eines Winkels.* — a) Addirt man 38 und 39, nachdem man in 39 die beiden Seiten vertauscht, so folgt:

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

und hieraus $$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}},$$

oder, wenn man $2\alpha = \beta$, und folglich $\alpha = \frac{\beta}{2}$ setzt:

42. $$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}.$$

b) Subtrahirt man 39 von 38, nachdem man in 39 die beiden Seiten vertauscht, so folgt:

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha,$$

und hieraus: $$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}},$$

oder, wenn man $2\alpha = \beta$, und folglich $\alpha = \frac{\beta}{2}$ setzt:

43. $$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}.$$

c) Dividirt man 43 durch 42, so folgt:

44. $$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}},$$

oder, je nachdem man den Bruch unter der Wurzel mit $1+\cos\beta$ oder $1-\cos\beta$ erweitert, nach 38:

44a. $$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Anm. Die Funktion $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ hat die Eigenschaft, dass sich alle Funktionen von β rational durch dieselbe ausdrücken lassen. Man führe diese Rechnung aus 1) für den Cosinus (mittelst 44), 2) für den Sinus (mittelst 38), 3) für die Tangens (mittelst 26).

33. *Summe und Differenz zweier Sinus oder zweier Cosinus.* — Setzt man in den Formeln 32—35 überall σ für α und δ für β, so giebt:

$$34) + 35)\quad \sin(\sigma+\delta) + \sin(\sigma-\delta) = 2\,.\,\sin\sigma\,.\,\cos\delta;$$
$$34) - 35)\quad \sin(\sigma+\delta) - \sin(\sigma-\delta) = 2\,.\,\cos\sigma\,.\,\sin\delta;$$
$$33) + 32)\quad \cos(\sigma-\delta) + \cos(\sigma+\delta) = 2\,.\,\cos\sigma\,.\,\cos\delta;$$
$$33) - 32)\quad \cos(\sigma-\delta) - \cos(\sigma+\delta) = 2\,.\,\sin\sigma\,.\,\sin\delta.$$

Setzt man nun links

45. $$\sigma = \frac{\alpha+\beta}{2},\quad \delta = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

45a. woraus folgt $$\sigma+\delta = \alpha,\quad \sigma-\delta = \beta,$$

so nehmen die vier Formeln folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 2 \,.\, \sin\sigma \,.\, \cos\delta; \\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2 \,.\, \cos\sigma \,.\, \sin\delta; \\ \cos\beta + \cos\alpha &= 2 \,.\, \cos\sigma \,.\, \cos\delta; \\ \cos\beta - \cos\alpha &= 2 \,.\, \sin\sigma \,.\, \sin\delta. \end{aligned}\right\} \qquad 46.$$

Anm. Diese Formeln dienen dazu, eine Summe oder Differenz zweier Sinus oder Cosinus (zum Zweck der bequemeren logarithmischen Berechnung) in ein Product von Funktionen zu verwandeln.

B. Die Winkelfunktionen in transcendenter und Reihenform.

34. *Vorbemerkung.* — Zwischen den Winkelfunktionen und der transcendenten Funktion a^x besteht der Zusammenhang, dass die ersteren sich durch die letztere ausdrücken lassen. Da nun, wie im Folgenden gezeigt werden soll, die Funktion a^x sich als unendliche, nach Potenzen von x fortschreitende Reihe darstellen lässt, so gilt dasselbe für die Winkelfunktionen. — Der Nutzen dieser Darstellung besteht darin, dass die Winkelfunktionen als unendliche Reihen in algebraischer Form erscheinen, und in Folge dessen ihre Berechnung mit beliebig weit gehender Genauigkeit ausgeführt werden kann.

Für den Zweck dieser neuen Darstellung der Winkelfunktionen benutzt man nicht mehr den rechten Winkel mit seinen Theilen: Grad, Minute, Secunde, als Masseinheiten, sondern es wird der Winkel, als Centriwinkel eines beliebigen Kreises betrachtet, durch den zugehörigen Bogen ersetzt, und dieser durch den Radius gemessen. Ist nämlich α ein beliebiger Winkel, a der zugehörige Bogen in dem mit r, und a_1 der zugehörige Bogen in dem mit r_1 beschriebenen Kreise, so ist (Th. II, 287)

$$\frac{\alpha}{4R} = \frac{a}{2r\pi} = \frac{a_1}{2r_1\pi};$$

also

$$\frac{a}{r} = \frac{a_1}{r_1} = x,$$

und x als Quotient zweier Strecken eine Zahl. Ferner folgt:

$$\alpha = \frac{2R}{\pi} \,.\, x; \quad x = \frac{\pi\alpha}{2R}. \qquad 47.$$

Diese Formeln zeigen, wie ein in der einen Masseinheit gegebener Winkel durch die andere ausgedrückt werden kann. Insbesondere ist für

$$\alpha = R, \quad 2R, \quad 4R.$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad 2\pi.$$

Anm. Wie gross ist α für $x=1$? D. h.: wie gross ist der Centriwinkel, dessen zugehöriger Bogen dem Radius gleich ist?

35. *Darstellung der Funktion a^x in Reihenform.* — Wir setzen

$$(1) \qquad F_x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

und suchen die Coefficienten a_0, a_1, a_2 ... so zu bestimmen, dass die hiernach für F_x, F_y und F_{x+y} gebildeten Reihen der Bedingung

$$(2) \qquad F_x \,.\, F_y = F_{(x+y)}$$

genügen. Es soll also sein

$$F_x(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots)$$
$$= a_0 + a_1(x+y) + a_2(x+y)^2 + a_3(x+y)^3 + \ldots,$$

oder, nach Potenzen von y geordnet:

$$a_0 F_x + a_1 F_x y + a_2 F_x y^2 + \ldots$$
$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) + y(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots)$$

Da nun diese Formel für jeden Werth von y gelten soll, so müssen die Coefficienten gleichhoher Potenzen von y einander gleich sein, z. B. die Coefficienten von y:

$$a_1 a_0 + a_1 a_1 x + a_1 a_2 x^2 + a_1 a_3 x^3 + \ldots$$
$$= a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + 4\,a_4 x^3 + \ldots$$

Da diese Formel für jeden Werth von x gelten soll, so müssen die Coefficienten gleichhoher Potenzen von x einander gleich sein; d. h.:

$a_1 a_0 = a_1$; $a_1 a_1 = 2a_2$; $a_1 a_2 = 3a_3$; $a_1 a_3 = 4a_4$; ... $a_1 a_{n-1} = n a_n$;

oder:

$$a_0 = 1; \quad a_2 = \frac{a_1^{\,2}}{2!}; \quad a_3 = \frac{a_1^{\,3}}{3!}; \quad a_4 = \frac{a_1^{\,4}}{4!}; \ldots \quad a_n = \frac{a_1^{\,n}}{n!}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in (1) erhält man:

$$(3) \quad F_x = 1 + a_1 x + \frac{a_1^{\,2}}{2!} x^2 + \frac{a_1^{\,3}}{3!} x^3 + \ldots$$

Setzt man nun in (2) $x = 1$, und y nach einander gleich 1, 2, 3, ... $(x-1)$, so folgt:

$(F_1)^2 = F_2$; $F_1 \,.\, F_2 = F_3$; $F_1 \,.\, F_3 = F_4$; .... $F_1 \,.\, F_{x-1} = F_x$,

und durch Multiplication aller dieser Formeln:

$$(4) \qquad (F_1)^x = F_x.$$

Setzt man endlich den Werth, welchen F_1 für $a_1 = 1$ annimmt, gleich e, sodass

$$(5) \qquad e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \qquad 48.$$

ist, so folgt aus (4) und (3)

$$(6) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad 49.$$

Aus (6) erhält man nun leicht die Reihe für a^x. Setzt man nämlich in (6) $a_1 x$ für x, so folgt mit Rücksicht auf (3)

$$(7) \qquad e^{a_1 x} = F_x, \text{ oder } (e^{a_1})^x = F_x.$$

Setzt man endlich

$$e^{a_1} = a,$$

woraus

$$(8) \qquad a_1 = {}^e\!l\, a \qquad 50.$$

folgt, so geht (7) über in

$$(9) \quad a^x = 1 + a_1 x + \frac{a_1^{\,2}}{2!} x^2 + \frac{a_1^{\,3}}{3!} x^3 + \ldots \qquad 51.$$

36. *Die Zahl e.* — Das Bildungsgesetz der Reihe (5) besteht darin, dass man das n^{te} Glied aus dem $(n-1)^{\text{ten}}$ durch Multiplication mit $\frac{1}{n-1}$ erhält. Sie ist also weder arithmetisch noch geometrisch. Es ist nun zuerst zu untersuchen, ob der Werth der Reihe mit wachsender Gliederzahl sich einer bestimmten Grösse nähert, oder ins Unendliche wächst. Im ersten Falle hat e einen bestimmten Werth, im zweiten den Werth ∞.

Eine unendliche Reihe heisst convergent oder divergent, je nachdem ihr Werth mit wachsender Gliederzahl sich einer festen Grenze nähert, oder über jede Grenze hinaus wächst. Unter dem Quotienten einer unendlichen Reihe versteht man den positiven Werth des Quotienten zwischen irgend einem ihrer Glieder und dem vorhergehenden. Nun ist die unendliche geometrische Reihe (s. Th. I, Nr. 143) convergent, wenn ihr Quotient kleiner als Eins ist. Dieser Quotient ist für je zwei auf einander folgende Glieder stets derselbe. Umsomehr wird daher eine allgemeine unendliche Reihe convergent sein, wenn ihr Quotient von irgend einem Gliede an beständig kleiner als Eins ist und beständig abnimmt, sodass er von irgend einem Gliede der Reihe an beständig kleiner bleibt als irgend eine gegebene Zahl q, die kleiner als Eins ist. Denn die ganze Reihe würde noch convergiren, wenn man sie von diesem Gliede an mit dem unveränderlichen Quotienten q fortsetzte. Ihr erster, endlicher Theil wäre dann eine

endliche Grösse, ihr zweiter eine convergirende unendliche geometrische Reihe. Man kann also den Satz aussprechen:

51a. Eine unendliche Reihe convergirt, wenn ihr Quotient von irgend einem Gliede an beständig kleiner bleibt, als eine gegebene Zahl, die kleiner als Eins ist.

Der Quotient der Reihe (9) ist nun

$$\frac{a_1{}^n}{n!}x^n : \frac{a_1{}^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} = \frac{a_1 x}{n}.$$

Da a_1 und x unveränderlich sind, während n beständig wächst, so ist der Quotient von dem ersten Gliede an, für welches $a_1 x < n$ ist, kleiner als Eins, und nimmt beständig ab. Demnach convergirt die Reihe (9) für jeden reellen Werth von a_1 und x.

Es ist also auch e^x für jeden endlichen Werth von x selbst eine endliche Grösse, und die Reihe (6) ist convergent. — Demnach ist auch e eine endliche Grösse, deren Berechnung in Form eines Decimalbruches den Werth liefert:

52. $$e = 2{,}718281828\ldots.$$

Anm. Die Zahl e ist Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems (vgl. Th. I, S. 137, Fussnote).

37. *Die Funktionen cos und sin in transcendenter und in Reihenform.* — Setzt man in (6) xi für x, so folgt (Th. I, 118)

$$(1)\quad e^{xi} = 1 + xi - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3 i}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5 i}{5!} - \ldots,$$

oder, wenn man

$$(2)\quad \begin{cases} f_x = 1 - \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots \\ \varphi_x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots \end{cases}$$

setzt: $$(3)\quad e^{xi} = f_x + i \,.\, \varphi_x.$$

Ebenso ist

$$(4)\quad e^{yi} = f_y + i \,.\, \varphi_y$$

und $$(5)\quad e^{(x+y)i} = f_{(x+y)} + i \,.\, \varphi_{(x+y)}.$$

Wenn man nun die Potenz mit imaginären Exponenten durch die Festsetzung bestimmt, dass

$$(6)\quad e^{xi} \,.\, e^{yi} = e^{(x+y)i}$$

ist (wodurch nur die Regel 41 in Th. I auf imaginäre Exponenten ausgedehnt wird), so folgt, wenn man für diese drei Potenzen ihre Werthe einsetzt:

$$f_x f_y - \varphi_x \varphi_y + i(f_x \varphi_y + \varphi_x f_y) = f_{(x+y)} + i\varphi_{(x+y)}.$$

Nun können aber zwei complexe Zahlen nur dann einander gleich sein, wenn sowohl ihre reellen, wie ihre imaginären Theile einander gleich sind.*) Aus der letzten Formel folgt also:

$$f_{(x+y)} = f_x f_y - \varphi_x \varphi_y; \quad \varphi_{(x+y)} = f_x \varphi_y + \varphi_x f_y.$$

Vergleicht man diese beiden Formeln mit 32 und 34, so zeigt sich, dass die Funktionen f und φ genau den Bedingungen genügen, welche in jenen Formeln für *cos* und *sin* enthalten sind. Und da die Funktionen *cos* und *sin* durch die Formeln 32 und 34 vollständig definirt sind, so ist f mit *cos* und φ mit *sin* identisch. Man erhält also, wenn man für f_x und φ_x einerseits $\cos x$ und $\sin x$, andrerseits ihre oben aufgestellten Werthe (2) in Reihenform einsetzt:

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}\right\} \quad 53.$$

Die Formel (3) geht nun über in:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x. \quad 54.$$

Setzt man hierin $(-x)$ für x, so folgt mit Rücksicht auf 30:

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x.$$

Und aus den beiden letzten Formeln folgt weiter:

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}. \quad 55.$$

Ferner folgt aus (6), wenn man nach 54 die Potenzen von e durch die Winkelfunktionen ersetzt:

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x + y) + i \sin(x + y). \quad 56.$$

Setzt man hierin $x = y$, so folgt:

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x,$$

und allgemein:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx. \quad 57.$$

Entwickelt man in dieser Formel die linke Seite nach Th. I, 192, und setzt die reellen und die imaginären Theile einander gleich, so folgt:

---

*) Denn aus $a + bi = a_1 + b_1 i$ folgt $(a - a_1) = (b_1 - b)i$. Da aber eine reelle Zahl einer imaginären nicht gleich sein kann, so muss (wenn a, b, a_1, b_1 reell sind) $b_1 - b = 0$ sein, woraus $a - a_1 = 0$ folgt. Es muss also $a = a_1$ und $b = b_1$ sein.

58. $$\begin{cases} \cos nx = \cos^n x - n \cdot^2 \cos^{n-2} x \,.\, \sin^2 x + n \cdot^4 \cos^{n-4} x \,.\, \sin^4 x - \ldots \\ \sin nx = n \,.\, \cos^{n-1} x \,.\, \sin x - n^3 \cos^{n-3} x \,.\, \sin^3 x + n^5 \cos^{n-5} x \,.\, \sin^5 x - \ldots \end{cases}$$

Anm. In den Formeln 56 und 57 sind 32, 34, 39, 40 enthalten

Für $x = \frac{\pi}{2}$ ist $\cos x = 0$, $\sin x = 1$; also geht 54 über in:

$$e^{\frac{\pi}{2} i} = i,$$

59. oder, mit i potenzirt: $e^{-\frac{\pi}{2}} = i^i$.

Anm. Die Darstellung der übrigen trigonometrischen Funktionen in Reihenform wird ihrer geringeren Wichtigkeit wegen hier übergangen.

38. *Die Funktionen des Logarithmus und der Wurzel.* — Potenzirt man die Formel

$$(1)\quad e^{\frac{\pi}{2} i} = i$$

mit 2, so folgt: $(2)\quad e^{\pi i} = -1.$

Dies, mit 2 potenzirt, giebt:

$$(3)\quad e^{2\pi i} = +1.$$

Bedeutet ferner n eine ganze Zahl, so giebt (3), mit n potenzirt: $(4)\quad e^{2n\pi i} = +1;$

ferner giebt (4)×(1) $(5)\quad e^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i} = +i;$

ferner (4)×(2) $(6)\quad e^{(2n+1)\pi i} = -1;$

endlich (6)×(1) $(7)\quad e^{\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi i} = -i.$

Die Formeln (4) bis (7) kann man auch schreiben:

60. $$e^{4n \cdot \frac{\pi}{2} i} = +1;\ e^{(4n+1)\frac{\pi}{2} i} = +i;\ e^{(4n+2)\frac{\pi}{2} i} = -1;\ e^{(4n+3)\frac{\pi}{2} i} = -i.$$

Setzt man in 54 der Reihe nach $x = 4n \,.\, \frac{\pi}{2}$, $(4n+1)\frac{\pi}{2}$, $(4n+2)\frac{\pi}{2}$, $(4n+3)\frac{\pi}{2}$, so folgt mit Rücksicht auf 60:

$$\cos 4n\frac{\pi}{2} + i \sin 4n\frac{\pi}{2} = e^{4n \cdot \frac{\pi}{2} i} = +1;$$

$$\cos (4n+1)\frac{\pi}{2} + i \sin (4n+1)\frac{\pi}{2} = e^{(4n+1)\frac{\pi}{2} i} = +i;$$

$$\cos (4n+2)\frac{\pi}{2} + i \sin (4n+2)\frac{\pi}{2} = e^{(4n+2)\frac{\pi}{2} i} = -1;$$

$$\cos (4n+3)\frac{\pi}{2} + i \sin (4n+3)\frac{\pi}{2} = e^{(4n+3)\frac{\pi}{2} i} = -i.$$

Daher durch Trennung der reellen Theile von den imaginären:

$$\left.\begin{array}{l} \cos 4n\frac{\pi}{2}=+1;\ \cos(4n+1)\frac{\pi}{2}=0;\ \cos(4n+2)\frac{\pi}{2}=-1;\ \cos(4n+3)\frac{\pi}{2}=0; \\ \sin 4n\frac{\pi}{2}=0;\ \sin(4n+1)\frac{\pi}{2}=+1;\ \sin(4n+2)\frac{\pi}{2}=0;\ \sin(4n+3)\frac{\pi}{2}=-1. \end{array}\right\} 61.$$

Anm. In diesen Formeln sind die in 31 gegebenen Werthe von *sin* und *cos* als specielle Fälle enthalten.

Setzt man

$$e^x = c, \text{ also } {}^e\!l\, c = x,$$

so gehört zu jedem reellen positiven Werthe von x ein Werth von c, aber auch umgekehrt zu jedem reellen positiven Werthe von c ein Werth von x. Multiplicirt man nun $e^x = c$ mit (4), so folgt:

$$e^{x+2n\pi i} = c;$$

also:

$${}^e\!l\, c = x + 2n\pi i;$$

d. h.: Eine reelle positive Zahl hat unendlich viele Logarithmen, von denen aber nur einer reell ist (für $n = 0$). 62.

Multiplicirt man $e^x = c$ mit (6), so folgt:

$$e^{x+(2n+1)\pi i} = -c;$$

also:

$${}^e\!l\,(-c) = x + (2n+1)\pi i;$$

d. h.: Eine reelle negative Zahl hat unendlich viele Logarithmen, die sämmtlich imaginär sind. 62a.

Anm. Aus (5) folgt:

$$\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i = {}^e\!l_i;$$

also für $n = 0$:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{{}^e\!l_i}{i}. \qquad 63.$$

Potenzirt man die Formel (4) mit $\frac{1}{k}$ (wobei k eine ganze positive Zahl ist), so folgt:

$$\sqrt[k]{1} = e^{\frac{2n\pi i}{k}}. \qquad 64.$$

Setzt man n der Reihe nach den Zahlen 0, 1, 2, ... $(k-1)$ gleich, so erhält man lauter verschiedene Werthe für $\sqrt[k]{1}$. Denn aus $e^{\frac{2r\pi i}{k}} = e^{\frac{2s\pi i}{k}}$ (wobei r und $s < k$ sind) würde folgen:

$e^{\frac{2(r-s)\pi i}{k}} = +1$; d. h.: es müsste $\frac{r-s}{k}$ eine ganze Zahl sein, was nicht möglich ist.

Setzt man n gleich einer Zahl, die $\geq k$ ist, also gleich $(rk+s)$ (wobei $s < k$ ist), so ist

$$e^{\frac{2(rk+s)\pi i}{k}} = e^{2r\pi i} \cdot e^{\frac{2s\pi i}{k}} = e^{\frac{2s\pi i}{k}},$$

also gleich einem der früheren Werthe.

Demnach hat der Ausdruck $\sqrt[k]{1}$ k von einander verschiedene Werthe, die man erhält, wenn man in 64 für n der Reihe nach die Zahlen 0, 1, 2, ... $(k-1)$ setzt. Einer dieser Werthe (für $n = 0$) ist stets reell, nämlich $+1$. — Ist $s < k$, so sind je zwei der übrigen Werthe durch die Beziehung verbunden:

$$e^{\frac{2s\pi i}{k}} \cdot e^{\frac{2(k-s)\pi i}{k}} = e^{2k\pi i} = +1.$$

Ist nun k ungerade, so ist die Anzahl dieser übrigen Werthe gerade, und sie lassen sich alle paarweise so ordnen, dass das Product jedes Paares gleich 1 ist. Alle diese Werthe sind dann imaginär. — Ist aber k gerade, so bleibt in der Mitte der Reihe der Werth übrig, welcher der Annahme $n = \frac{k}{2}$ entspricht. Aber für $n = \frac{k}{2}$ ist $\sqrt[k]{1} = e^{\pi i} = -1$. In diesem Falle existirt also noch der zweite reelle Werth -1.

Anm. Vgl. Th. I, Nr. 98, 108, 113.

Da $\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{1} \cdot \sqrt[k]{a}$ ist, so hat auch die $\sqrt[k]{a}$ k verschiedene Werthe, und die Gleichung $x^n = a$ hat n verschiedene Wurzeln.

Anm. Der Beweis des allgemeinen Satzes, dass jede Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln besitzt, erfordert Betrachtungen, die nicht hierher gehören.

39. *Die inversen trigonometrischen Funktionen.* — Setzt man in 55 $x + 2n\pi$ für x, so bleibt (nach 60) die rechte Seite in beiden Formeln unverändert; mithin ist

$$\cos(x + 2n\pi) = \cos x;\ \sin(x + 2n\pi) = \sin x;\ tg(x + 2n\pi) = tg\, x$$

(vgl. 18). — Während also zu jedem Werthe von x ein bestimmter Werth von $\cos x$, $\sin x$, $tg\, x$ gehört, giebt es unendlich viele (in dem Ausdruck $x + 2n\pi$ enthaltene) Zahlen, welche zu demselben Funktionswerthe von *sin*, *cos* oder *tg* gehören. — Stellt man sich also die Aufgabe, x als Funktion von $\sin x$,

cos x, *tg x* darzustellen, so muss der Werth von x in solche Grenzen eingeschlossen werden, dass z. B. einem Werthe von *sin x* nur ein Werth von x entspricht. Man setzt zu diesem Zwecke voraus, dass x zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liege, da in diesem Intervall x und die zugehörige Funktion einander gegenseitig vollkommen bestimmen (s. Nr. 17).

Ist nun

$$sin\, x = y;\ cos\, x = z;\ tg\, x = u,$$

so nennt man x den *arcussinus* von y, oder den *arcuscosinus* von z, oder den *arcustangens* von u, und schreibt

$$x = arcsin\, y;\ x = arccos\, z;\ x = arctg\, u.$$

40. *Die Funktion arcustangens in Reihenform.* — Setzt man in der Formel 37

$$(1) \qquad tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha \,.\, tg\,\beta}$$

(2) $tg\,\alpha = x + y;\ tg\,\beta = x;$ also $tg\,(\alpha - \beta) = \frac{y}{1 + x^2 + xy}$,

so folgt hieraus:

(3) $\alpha = arctg\,(x+y);\ \beta = arctg\, x;\ (\alpha - \beta) = arctg\, \frac{y}{1 + x^2 + xy}$;

folglich:

$$(4) \qquad arctg\,(x + y) - arctg\, x = arctg\, \frac{y}{1 + x^2 + xy}.$$

Um nun *arctg x* in Form einer Reihe darzustellen, setzen wir

$$(5) \qquad arctg\, x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

und suchen die Coefficienten a_0, a_1, a_2 ... so zu bestimmen, dass die hiernach für *arctg* $(x + y)$ und *arctg* $\frac{y}{1 + x^2 + xy}$ gebildeten Reihen der Bedingung (4) genügen.

Nun ist zunächst, für $x = 0$, $tg\, 0 = 0$ (31), also $arctg\, 0 = 0$; d. h.: $a_0 = 0$. — Dann folgt aus (5)

$$x = tg\,(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$$

Nun ist aus 53 ersichtlich, dass, wenn man die Reihe für *sin x* durch diejenige für *cos x* dividirt, das erste Glied des Quotienten x ist, während alle folgenden höhere Potenzen von x enthalten (vgl. Th. I, 88). Mithin ist in der Reihe für $tg\,(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$ das erste Glied $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, d. h.: $x = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, folglich $a_1 = 1$. Demnach geht (5) über in

$$(6) \qquad arctg\, x = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Setzt man nun in (4) die Reihen ein, welche aus (6) für $arctg\,(x+y)$ und $arctg\,\frac{y}{1+x^2+xy}$ folgen, so erhält man:

$$(x+y)+a_2(x+y)^2+a_3(x+y)^3+\ldots-arctg\,x=\frac{y}{(1+x^2)+xy}+\ldots$$

oder, nach Potenzen von y entwickelt:

$$(x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)+y(1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots)=arctg\,x+\frac{y}{1+x^2}+\ldots$$

Da nun diese Formel für jeden Werth von y gelten soll, so müssen die Coefficienten gleichhoher Potenzen von y einander gleich sein, z. B. die Coefficienten von x:

$$1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots$$

(nach Th. I, 148, jedoch nur unter der Bedingung, dass $x<1$ ist; s. d. Fussnote a. a. O.).

Da diese Formel für jeden Werth von $x\,(<1)$ gelten soll, so müssen die Coefficienten gleichhoher Potenzen von x einander gleich sein; d. h.:

$$a_2=a_4=a_6=\ldots=0;$$

$$3a_3=-1;\ 5a_5=+1;\ 7a_7=-1;\ \ldots\ldots$$

oder: $$a_3=-\frac{1}{3};\ a_5=+\frac{1}{5};\ a_7=-\frac{1}{7};\ \ldots$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in (6) erhält man:

65. $$arctg\,x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\ldots$$

Der Quotient dieser Reihe ist (n^{tes} Glied durch das $(n-1)^{\text{te}}$ dividirt):

$$\pm\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}:\mp\frac{1}{2n-3}\cdot x^{2n-3}=-\frac{2n-3}{2n-1}x^2.$$

Da $x<1$ ist, so ist der Quotient <1, und bleibt auch, wenn n zunimmt, beständig kleiner als die Zahl x^2, welche selbst <1 ist. Daher convergirt die Reihe nach 51a.

Anm. Die Darstellung der übrigen inversen Funktionen in Reihenform wird ihrer geringeren Wichtigkeit wegen hier übergangen.

41. *Zusammenhang zwischen den Funktionen log und arctg.*— Sei $$a=c\,.\,cos\,x,\quad b=c\,.\,sin\,x,$$ also (nach 38)

(1) $$a^2+b^2=c^2;\ \frac{b}{a}=tg\,x.$$

Dann ist

$$(2)\quad \begin{cases} a+bi = c(\cos x + i \sin x) = ce^{xi} \\ a-bi = c(\cos x - i \sin x) = ce^{-xi}, \end{cases} \qquad (54)$$

d. h.: Jede complexe Zahl $a \pm bi$ kann in der Form 66.
$ce^{\pm xi}$ dargestellt werden, wobei $c = \sqrt{a^2+b^2}$ und $x = arctg \frac{b}{a}$ ist.

Logarithmirt man (2) nach e, so folgt mit Rücksicht auf (1)

$$^e\!l(a \pm bi) = \frac{1}{2}\,{}^e\!l(a^2+b^2) \pm i \,.\, arctg \frac{b}{a}. \qquad 67.$$

Durch diese Formel ist der Logarithmus einer complexen Zahl selbst als complexe Zahl dargestellt, und auf den Logarithmus einer reellen Zahl und eine *arcustangens*-Funktion zurückgeführt.

Dividirt man die beiden Formeln (2) durch einander, so folgt:

$$\frac{a+bi}{a-bi} = e^{2xi},$$

oder, nach e logarithmirt:

$$^e\!l\frac{a+bi}{a-bi} = 2i \,.\, arctg \frac{b}{a},$$

oder, wenn man $\frac{b}{a} = z$ setzt:

$$arctg\, z = \frac{1}{2i} \cdot {}^e\!l\frac{1+zi}{1-zi}. \qquad 68.$$

Mittelst dieser Formel ist die *arcustangens*-Funktion durch einen Logarithmus ausgedrückt.

42. ***Die logarithmische Reihe.*** — Setzt man in der complexen Zahl $a \pm bi$ für a und b imaginäre Zahlen, nämlich

$$(1)\quad a = \pm vi,\ b = \mp ui,$$

wobei u, v reell sind, so ist

$$a \pm bi = u \pm vi;$$

d. h.: Die Substitution (1) verwandelt die complexe Zahl $a \pm bi$ wieder in eine andere complexe Zahl mit reellen Coefficienten. Es ist hiernach gleichgiltig, ob man in der complexen Zahl $a \pm bi$ die Grössen a und b für reell oder imaginär ansieht.

Setzt man nun in 68

$$zi = y, \text{ also } z = -iy,$$

so ist zunächst nach 65

$$arctg\,(-iy) = -\left[iy - \frac{1}{3}(iy)^3 + \frac{1}{5}(iy)^5 - \ldots\right]$$

$$= -\left[iy + \frac{1}{3}iy^3 + \frac{1}{5}iy^5 + \ldots\right] \text{ (Th. I, 118)}$$

$$= -i\left[y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \ldots\right]$$

Demnach aus 68

$$\frac{1}{2i}\,{}^{e}l\,\frac{1+y}{1-y} = -i\left[y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \ldots\right],$$

oder, mit $2i$ multiplicirt (da $-i^2 = +1$ ist):

69. $$^{e}l\,\frac{1+y}{1-y} = 2\left[y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 + \ldots\right],$$

eine Formel, welche zur Berechnung der natürlichen Logarithmen dient, für den Fall, dass $y < 1$ ist.

43. *Berechnung von Logarithmen.* — Soll hiernach der natürliche Logarithmus einer beliebigen positiven reellen Zahl n berechnet werden, so muss n auf die Form $\frac{1+y}{1-y}$ gebracht werden, wobei $y < 1$, also etwa $y = \frac{a_1}{a_2}$ und $a_1 < a_2$ ist.

Man hat also

$$n = \frac{1 + \frac{a_1}{a_2}}{1 - \frac{a_1}{a_2}} = \frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1},$$

woraus folgt:

$$y = \frac{a_1}{a_2} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Demnach ist

70. $$^{e}l\,n = 2\left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5 + \ldots\right].$$

Soll der gemeine Logarithmus von n berechnet werden, so benutzt man die Formel (Th. I, Anm. zu 67)

$$\frac{^{c}l\,y}{^{c}l\,x} = {}^{x}l\,y; \text{ oder: } {}^{10}l\,n = \frac{^{e}l\,n}{^{e}l\,10}.$$

Hierdurch ist der gemeine Logarithmus auf den natürlichen zurückgeführt.

Sollen die natürlichen Logarithmen der ganzen Zahlen berechnet werden, so braucht man Formel 70 nur auf solche Zahlen n anzuwenden, die durch keine andere Zahl theilbar sind (Primzahlen). Denn ist $n = pq$, so ist $\boldsymbol{l}n = \boldsymbol{l}p + \boldsymbol{l}q$, also am Einfachsten aus den schon bekannten Logarithmen von p und q zu finden. Die Rechnungen werden aber noch wesentlich abgekürzt durch weitere Formeln, die hier noch abgeleitet werden sollen. Es ist

$$\boldsymbol{l}(p+q) = \boldsymbol{l}\left[p\left(1+\frac{q}{p}\right)\right] = \boldsymbol{l}p + \boldsymbol{l}\left(1+\frac{q}{p}\right).$$

Ferner, wenn man in 70 $n = 1 + \frac{q}{p}$ setzt, woraus $\frac{n-1}{n+1} = \frac{q}{2p+q}$ folgt:

$${}^{e}\boldsymbol{l}\left(1+\frac{q}{p}\right) = 2\left[\frac{q}{2p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^5 + \ldots\right].$$

Demnach ist

$${}^{e}\boldsymbol{l}(p+q) = {}^{e}\boldsymbol{l}p + 2\left[\frac{q}{2p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^5 + \ldots\right]. \quad 71.$$

Anm. Anleitung zur Berechnung einiger Logarithmen. — ${}^{e}\boldsymbol{l}2$. Man setze in 71 $p = q = 1$, so ist ${}^{e}\boldsymbol{l}2 = {}^{e}\boldsymbol{l}1 + 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right]$. Nun ist ${}^{e}\boldsymbol{l}1 = 0$ (Th. I, 81). Aus $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ erhält man $\left(\frac{1}{3}\right)^3, \left(\frac{1}{3}\right)^5$ durch wiederholte Division mit 9. Setzt man auf diese Weise die Berechnung der Reihe bis incl. $\left(\frac{1}{3}\right)^{11}$ fort, wobei $\frac{1}{3}$ auf 7 Decimalstellen berechnet ist, so erhält man ${}^{e}\boldsymbol{l}2 = 0{,}6931470$. — ${}^{e}\boldsymbol{l}10 = {}^{e}\boldsymbol{l}(2^3+2)$. Man setze in 71 $p = 2^3$, $q = 2$, so ist ${}^{e}\boldsymbol{l}10 = 3\,{}^{e}\boldsymbol{l}2 + 2\left[\frac{1}{q} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{q}\right)^5 + \ldots\right] = 2{,}3025850$. Die Zahl $\frac{1}{{}^{e}\boldsymbol{l}10}$ heisst der Modul des gemeinen Logarithmensystems. Sie dient, wie schon oben bemerkt, dazu, den gemeinen Logarithmus einer Zahl aus dem natürlichen zu finden. — ${}^{e}\boldsymbol{l}5 = {}^{e}\boldsymbol{l}\frac{10}{2} = {}^{e}\boldsymbol{l}10 - {}^{e}\boldsymbol{l}2$.

Weiter hat man

$$p = \sqrt{p^2 - 1 + 1};\ \boldsymbol{l}p = \frac{1}{2}\boldsymbol{l}[(p^2-1)+1],$$

oder nach 71, wenn man dort p^2-1 für p, und 1 für q setzt, wodurch $\frac{q}{2p+q}$ in $\frac{1}{2p^2-1}$ übergeht:

$$^el_p=\frac{1}{2}{}^el(p^2-1)+\left[\frac{1}{2p^2-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^5+\ldots\right],$$

oder endlich, wenn man p^2-1 durch $(p+1)(p-1)$ ersetzt:

72. $$^el_p=\frac{^el(p+1)+{}^el(p-1)}{2}+\left[\frac{1}{2p^2-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^5+\ldots\right].$$

Ist nun p eine Primzahl, so sind $p+1$ und $p-1$ gerade Zahlen; also können ihre Logarithmen durch denjenigen von 2 und durch die Logarithmen zweier Zahlen ausgedrückt werden, die kleiner sind als p.

Anm. Von den beiden in 70 und 72 enthaltenen Reihen ist die letztere diejenige, welche bei weitem rascher convergirt, die also, schon nach wenig Gliedern abgebrochen, ein Resultat von grosser Genauigkeit giebt.

Ist p eine Primzahl von der Beschaffenheit, dass p^2+1 sich in Factoren zerlegen lässt, deren Logarithmen man bereits kennt, so kann man eine noch stärker convergirende Reihe anwenden. Es ist

$$p=\sqrt[4]{p^4-1+1};\ l_p=\frac{1}{4}l[(p^4-1)+1],$$

oder nach 71, wenn man dort p^4-1 für p, und 1 für q setzt, wodurch $\frac{q}{2p+q}$ in $\frac{1}{2p^4-1}$ übergeht:

$$^el_p=\frac{1}{4}{}^el(p^4-1)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2p^4-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^5+\ldots\right],$$

oder endlich, wenn man p^4-1 durch $(p^2+1)(p+1)(p-1)$ ersetzt:

73. $$^el_p=\frac{^el(p^2+1)+{}^el(p+1)+{}^el(p-1)}{4}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2p^4-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^5+\ldots\right].$$

Anm. — Anleitung zur Berechnung weiterer Logarithmen. — $^el3$. Da $l(3^2+1)=l10$ schon bekannt ist, so hat man nach 73 $^el3=\frac{1}{4}\left[{}^el10+3\,{}^el2\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{161}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{161}\right)^3+\ldots\right]$. Schon die beiden ersten Glieder der Reihe liefern den Logarithmus auf 8 Stellen genau, nämlich $^el3=0{,}477121\,25$. — $^el7$. Da $7^2+1=5\,.\,10$, so wendet man wieder 73

an Für alle grösseren Primzahlen braucht man in den in 72 und 73 enthaltenen Reihen nur noch das erste Glied zu berechnen, um den Logarithmus bis auf 8 (bei 11 bis auf 7) und mehr Decimalstellen genau zu erhalten.

44. *Berechnung von* π. — Aus der Formel 16, $tg\,\frac{\pi}{4} = 1$, folgt $arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$. Setzt man nun in 65 $x = 1$, so folgt mit Rücksicht auf die eben gefundene Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad 74.$$

Anm. Zur wirklichen Berechnung von π eignet sich diese Reihe ihrer schwachen Convergenz wegen nicht. Im Folgenden wird eine Methode zur Herstellung convergenterer Reihen entwickelt.

Setzt man in der Formel 37

$$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

der Reihe nach

$$tg\,\alpha = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ tg\,\beta = a,$$

und

$$tg\,(\alpha - \beta) = a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

so erhält man für die vier ersten Werthe:

$$(1)\quad \begin{cases} a_1 = \frac{a_0 - a}{1 + a_0 a}; & arctg\,a_0 - arctg\,a = arctg\,a_1; \\ a_2 = \frac{a_1 - a}{1 + a_1 a}; & arctg\,a_1 - arctg\,a = arctg\,a_2; \\ a_3 = \frac{a_2 - a}{1 + a_2 a}; & arctg\,a_2 - arctg\,a = arctg\,a_3; \\ a_4 = \frac{a_3 - a}{1 + a_3 a}; & arctg\,a_3 - arctg\,a = arctg\,a_4. \end{cases}$$

Durch Addition der rechts stehenden Formeln erhält man

$$(2)\qquad arctg\,a_0 - 4\,arctg\,a = arctg\,a_4.$$

Setzt man in dieser Formel $a_0 = 1$, $a = \frac{1}{5}$, so erhält man aus (1) $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{7}{17}$, $a_3 = \frac{9}{46}$, $a_4 = -\frac{1}{239}$. Also:

$$(3)\qquad arctg\,1 - 4\,arctg\,\frac{1}{5} = -\,arctg\,\frac{1}{239}.^{*})$$

---

*) Denn ist $tg\,x = u$, so ist $tg\,(-x) = -u$; also $arctg\,u = x$; $arctg\,(-u) = -x = -\,arctg\,u$.

Setzt man ferner in der ersten der Formeln (1) $a_0 = \frac{1}{5}$, $a = \frac{1}{10}$, so ist $a_1 = \frac{5}{51}$; also

$$(4) \qquad arctg\,\frac{1}{5} - arctg\,\frac{1}{10} = arctg\,\frac{5}{51}.$$

Setzt man endlich in der ersten der Formeln (1) $a_0 = \frac{5}{51}$, $a = \frac{1}{10}$, so ist $a_1 = -\frac{1}{515}$; also

$$(5) \qquad arctg\,\frac{5}{51} - arctg\,\frac{1}{10} = -\,arctg\,\frac{1}{515}.$$

Addirt man dann die Formeln (3), (4), (5), nachdem man (4) und (5) mit 4 multiplicirt hat, und setzt für *arctg* 1 seinen Werth $\frac{\pi}{4}$, so erhält man zur Berechnung von π die überaus rasch convergirende Formel

75. $$\frac{\pi}{4} = 8\,.\,arctg\,\frac{1}{10} - 4\,.\,arctg\,\frac{1}{515} - arctg\,\frac{1}{239}.$$

Anm. Nimmt man in der Entwickelung von *arctg* $\frac{1}{10}$ die ersten drei Glieder, und in der von *arctg* $\frac{1}{515}$ und *arctg* $\frac{1}{239}$ jedesmal nur das erste Glied, so erhält man π bereits auf 6 Decimalstellen genau. — Gegenwärtig ist π bis auf 707 Decimalstellen berechnet (W. Shanks in den Proceedings of the London Mathematical Society. XXI, 315 und XXII, 45).

Angewandte Trigonometrie.

A. Die Berechnung der Dreiecke.

(Trigonometrie im engeren Sinne.)

I. Das rechtwinklige Dreieck.

45. Das rechtwinklige Dreieck ist durch zwei seiner Stücke (Seiten und Winkel), unter denen eine Seite sein muss, vollkommen bestimmt. Da ferner durch einen spitzen Winkel des Dreiecks der andere bestimmt ist, so braucht man, wenn zwei Stücke des Dreiecks gegeben sind, nur noch zwei Stücke zu suchen. Hierzu reichen die Formeln aus:

$$(1)\ \cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad (2)\ a^2 + b^2 = c^2.$$

Im Ganzen kann man folgende vier Aufgaben stellen:

	1.	2.	3.	4.
Gegeben:	$a,\ c.$	$a,\ b.$	$b,\ \alpha.$	$c,\ \alpha.$
Gesucht:	$b,\ \alpha.$	$c,\ \alpha.$	$c,\ a.$	$b,\ a.$
Formel:	(2), (1).	(2), (1).	(1), (2).	(1), (2).
Lösung:	$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}.$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}.$	$c = \frac{b}{\cos\alpha}.$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}.$	$b = c \cdot \cos\alpha.$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}.$

76.

Zu den gesuchten Stücken kann auch die Fläche des Dreiecks gehören. Dieselbe wird gefunden durch die Formel (s. Th. II, 354)

$$(3)\ f^2 = \frac{ab}{2}.$$

Anm. Zur Lösung dieser vier Aufgaben mit Zahlenbeispielen kann die in Nr. 11 (S. 9) stehende Cosinustafel, zur Bildung solcher Zahlenbeispiele die im Anhang stehende Tafel der rationalen rechtwinkligen Dreiecke benutzt werden. — Auf das rechtwinklige Dreieck lässt sich das gleichschenklige zurückführen durch Construction der zur Basis gehörigen Höhe.

II. Das schiefwinklige Dreieck.

46. *Vorbemerkung.* — Das schiefwinklige Dreieck ist durch drei seiner Stücke (Seiten und Winkel) (unter denen sich eine Seite befinden muss) vollständig bestimmt (Th. II, 88). Die Berechnung der übrigen drei Stücke wird dadurch ermöglicht, dass man das gegebene Dreieck durch rechtwinklige Dreiecke ersetzt. Dies geschieht am einfachsten durch Fällen einer Höhe. Indess sind die hierdurch gewonnenen Formeln nicht einfach genug, zum Theil auch wegen der darin enthaltenen Summen und Differenzen zur logarithmischen Berechnung nicht geeignet. Dieselben werden daher in einer zweiten Methode durch andere, für die Berechnung mehr geeignete, ersetzt werden. — Entsprechend der vierfachen Bestimmung eines Dreiecks durch drei seiner Stücke können die vier Hauptaufgaben aufgestellt werden: das Dreieck zu berechnen aus

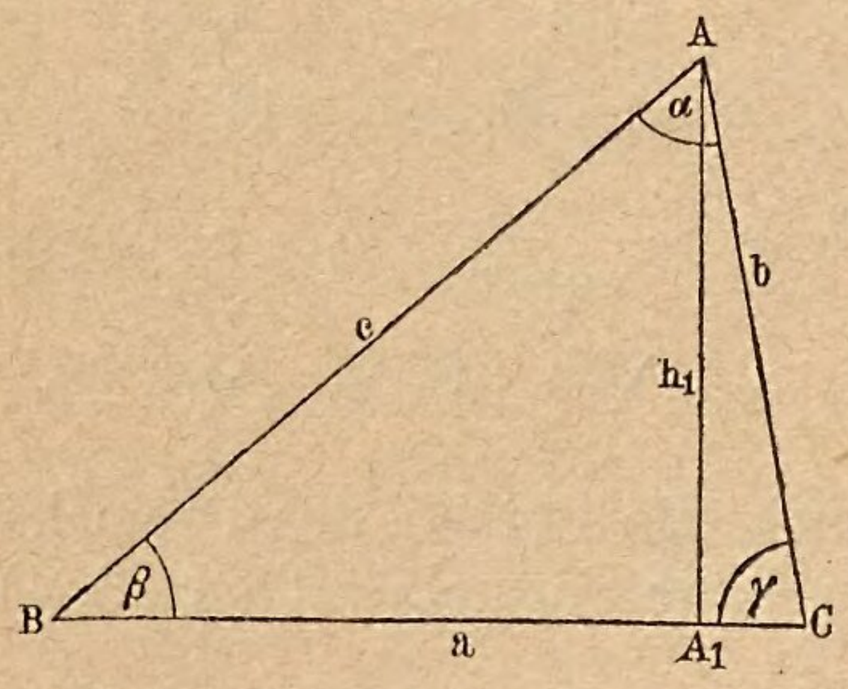
1) $a\beta\gamma(\alpha)$; 2) $ab\alpha$; 3) $ab\gamma$; 4) abc.

1. Erste Methode.

a. Geometrisches Verfahren.

47. *Der Sinussatz.* — Fällt man im Dreieck $\overline{ABC}$ (Fig. 9) die Höhe AA_1 auf BC, so entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke $\overline{AA_1B}$ und $\overline{AA_1C}$. Darin ist

Fig. 9.



$$\sin\beta = \frac{h_1}{c}; \quad \sin\gamma = \frac{h_1}{b}.$$

Indem man die erste dieser Formeln durch die zweite dividirt, folgt:

$$(1) \quad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}.$$

Durch Fällen der Höhe BB_1 würde man ebenso erhalten:

$$(2) \quad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}.$$

Und durch Multiplication von (1) und (2) folgt:

$$(3) \quad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}.$$

Diese drei Formeln enthalten zusammen den Satz (Sinussatz):

77. Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus ihrer Gegenwinkel.

Anm. Ist einer der an a liegenden Winkel, z. B. $\gamma > R$, so enthält das Dreieck $\overline{AA_1C}$ nicht γ, sondern den Winkel $(2R - \gamma)$. Da aber (nach 29) $\sin(2R - \gamma) = \sin\gamma$ ist, so bleibt der Satz auch für das stumpfwinklige Dreieck in Geltung. — Aus dem Sinussatz folgen die Sätze Th. II, 98, 107, 253.

Anwendung des Sinussatzes. — Da durch drei gegebene Stücke in einer Formel des Sinussatzes das vierte bestimmt ist, so können mittelst desselben die Aufgaben 1) $a\beta\gamma(\alpha)$ und 2) $ab\alpha$ gelöst werden. Es folgt nämlich aus (3) und (2)

$$1) \qquad b = \frac{a \,.\, \sin\beta}{\sin\alpha}; \quad c = \frac{a \,.\, \sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

$$2) \quad \sin\beta = \frac{b \,.\, \sin\alpha}{a}; \quad [\gamma = 2R - (\alpha + \beta)]; \quad c = \frac{a \,.\, \sin\gamma}{\sin\alpha},$$

wodurch in beiden Fällen alle unbekannten Stücke des Dreiecks bestimmt sind.

Anm. Ist im zweiten Falle $a > b$, so ist auch $\alpha > \beta$; mithin kann β kein stumpfer Winkel sein. Von den beiden Supplementwinkeln, deren gemeinsamer Sinus (nach 29) die Zahl $\frac{b \,.\, \sin\alpha}{a}$ ist, kann also nnr der spitze gleich β gesetzt werden. — Ist dagegen $a < b$, so ist auch $\alpha < \beta$, und es kann von den beiden Supplementwinkeln, deren gemeinsamer Sinus $\frac{b \,.\, \sin\alpha}{a}$ ist, nicht nur der spitze, sondern auch der stumpfe gleich β gesetzt werden. Die Aufgabe giebt also für β, γ, c je zwei verschiedene Werthe (Vgl. Th. II, 92 und 104 nebst den diese Sätze einleitenden Bemerkungen.)

48. *Der Cosinussatz.* — In Fig. 9 ist (nach Th. II, 364)

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2a \,.\, A_1C,$$

oder, wenn man A_1C durch seinen Werth $\pm b \,.\, \cos\gamma$ ersetzt (wobei die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, je nachdem der Winkel γ spitz oder stumpf ist):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos\gamma.$$

Zwei weitere Formeln von gleicher Gestalt erhält man hieraus durch Vertauschung der Buchstaben. Alle zusammen enthalten den Satz (Cosinussatz):

Das Quadrat einer Dreieckseite ist gleich der 78.
Summe der Quadrate der anderen Seiten, vermindert um das doppelte Product aus diesen Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Anm. Man untersuche die Formel des Cosinussatzes für die Fälle $\gamma = 0, R, 2R$.

Anwendung des Cosinussatzes. — Da durch drei gegebene Stücke in einer Formel des Cosinussatzes das vierte bestimmt

ist, so können mittelst desselben die Aufgaben 3) *abγ* und 4) *abc* gelöst werden. Es folgt nämlich aus der obigen Formel:

3) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma}$; $\sin\beta = \frac{b\ \sin\gamma}{c}$; $[\alpha = 2R - (\beta + \gamma)]$.

4) $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$; $\sin\beta = \frac{b.\sin\gamma}{c}$; $[\alpha = 2R - (\beta + \gamma)]$,

wodurch in beiden Fällen alle unbekannten Stücke des Dreiecks bestimmt sind.

Anm. In beiden Fällen ist die Aufgabe, nachdem das erste Stück (*c* oder γ) bestimmt ist, auf die Aufgabe 2) *bcγ* zurückgeführt. Diesmal aber kann die Bestimmung von β aus seinem Sinus keine Zweideutigkeit veranlassen, weil auch *a* bereits einen bestimmten Werth hat, und die Winkel des Dreiecks durch seine 3 Seiten eindeutig bestimmt sind. Ob also β stumpf oder spitz ist, wird stets ersichtlich sein aus der Bedingung, dass $\beta \gtrless \gamma$ ist, je nachdem $b \gtrless c$.

b. Algebraisches Verfahren.

49. In Fig. 9 ist $BA_1 = c\,.\,\cos\beta$; $CA_1 = b\,.\,\cos\gamma$. Durch Addition dieser Formeln erhält man

$$(1) \qquad c\,.\,\cos\beta + b\,.\,\cos\gamma = a,$$

und hieraus durch Vertauschung der Buchstaben

$$(2) \qquad a\,.\,\cos\gamma + c\,.\,\cos\alpha = b,$$

$$(3) \qquad b\,.\,\cos\alpha + a\,.\,\cos\beta = c.$$

Von den in diesen drei Gleichungen enthaltenen 6 Grössen *a*, *b*, *c*, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kann man je drei als bekannt, die übrigen drei als unbekannt betrachten, und durch Auflösung der Gleichungen nach diesen Unbekannten alle Formeln ableiten, welche zur Berechnung des Dreiecks aus drei gegebenen Stücken dienen können, insbesondere die Formeln des Sinus- und Cosinussatzes.

Setzt man zur Abkürzung

$$\cos\alpha = x,\ \cos\beta = y,\ \cos\gamma = z,$$

so lauten die Formeln (1)—(3):

$$(1)\ cy + bz = a;\quad (2)\ az + cx = b;\quad (3)\ bx + ay = c.$$

Um den Sinussatz zu finden, eliminirt man erstens *x* zwischen (2) und (3), und erhält (nach der Additionsmethode):

$$(4) \qquad a(bz - cy) = b^2 - c^2;$$

zweitens durch Elimination von *a* zwischen (1) und (4):

$$(5) \qquad b^2z^2 - c^2y^2 = b^2 - c^2,$$

oder:

$$b^2(1 - z^2) = c^2(1 - y^2),$$

oder, da $1-y^2=1-\cos^2\beta=\sin^2\beta$, $1-z^2=1-\cos^2\gamma=\sin^2\gamma$ ist:

$$b^2\sin^2\gamma=c^2\sin^2\beta;\ b\sin\gamma=c\sin\beta;\ \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

wodurch eine Formel des Sinussatzes hergestellt ist.

Anm. Um die beiden andern Formeln des Sinussatzes auf demselben Wege zu finden, müsste man zwischen den Gleichungen (1) bis (3) y und b, bezw. z und c eliminiren. Da jedoch das System der drei Gleichungen (1)—(3) durch Buchstabenvertauschung sich nicht ändert, so sieht man sogleich, dass diese Vertauschung auch auf die Lösung $\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ anwendbar ist, woraus dann die beiden andern Formeln des Sinussatzes sich ergeben.

Um den Cosinussatz zu finden, hat man zwischen den Gleichungen (1) bis (3) x und y, oder kürzer zwischen (1) und (4) y zu eliminiren. Das letztere Verfahren giebt (nach der Additionsmethode)

$$2abz=b^2-c^2+a^2,$$

oder, wenn man für z wieder $\cos\gamma$ setzt:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

wodurch eine Formel des Cosinussatzes hergestellt ist.

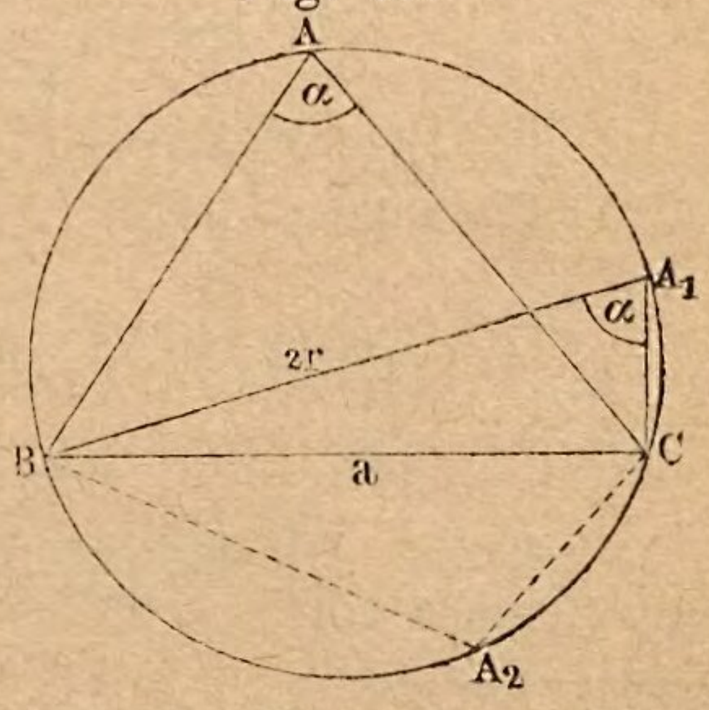
Anm. Hinsichtlich der anderen beiden Formeln des Cosinussatzes vgl. die vorige Anm. — Aus den Formeln (1) bis (3) lassen sich durch andere Arten der Elimination noch weitere Formeln für die Berechnung einzelner Stücke des Dreiecks ableiten; dieselben werden jedoch ihrer geringeren Wichtigkeit wegen hier übergangen.

2. Zweite Methode.

a. Der Satz vom umbeschriebenen Kreise.

50. *Vorbemerkung.* — Eine andere Methode, ein gegebenes schiefwinkliges Dreieck durch ein rechtwinkliges zu ersetzen, besteht darin, dass man durch den einen Endpunkt (B) einer Seite (a) den Durchmesser des Umkreises zieht (Fig. 10) und dessen Endpunkt (A_1) mit dem anderen Endpunkte (C) der ersten Seite verbindet. Dann ist in dem Hilfsdreieck $\overline{A_1BC}$ der Winkel bei C ein Rechter (Th. II, 165), und der Winkel bei A_1 gleich α (Th. II, 166).

Fig. 10.



Anm. Ist α ein stumpfer Winkel (BA_2C), so ist $BA_1C=2R-\alpha$ (Th. II, 178). Da aber $\sin(2R-\alpha)=\sin\alpha$ (29), so bleibt die Bedeutung des Hilfsdreiecks unverändert.

Aus der Betrachtung des Dreiecks $\overline{A_1BC}$ ergiebt sich nun die Formel

$$1a)\quad \sin\alpha = \frac{a}{2r};$$

und hieraus durch Vertauschung der Buchstaben:

$$1b)\quad \sin\beta = \frac{b}{2r};\quad 1c)\quad \sin\gamma = \frac{c}{2r}.$$

Diese drei Formeln enthalten zusammen den Satz:

79. Der Sinus eines Winkels im Dreieck ist gleich dem Quotienten aus der gegenüberliegenden Seite und dem Durchmesser des Umkreises.

Anm. Die Formeln 1) zeigen (was übrigens schon aus Th. II, 167 hervorgeht), dass jedes von den drei Stücken eines Dreiecks: a, α, r durch die beiden anderen bestimmt ist.

Aus den Formeln 1) folgt weiter:

$$2a)\quad a = 2r\,.\,\sin\alpha;\quad 2b)\quad b = 2r\,.\,\sin\beta;\quad 2c)\quad c = 2r\,.\,\sin\gamma.$$

$$3)\quad 2r = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Anm. Wie lauten diese Formeln in Worten? — Durch Elimination von $2r$ zwischen den Formeln 3) erhält man wieder die Formeln des Sinussatzes. Worin besteht der Vorzug der Formeln 1), 2), 3) vor denen des Sinussatzes?

51. *Anwendung des Satzes vom umbeschriebenen Kreise.* — Derselbe dient ebenso wie der Sinussatz zur Lösung der Aufgaben $a\beta\gamma(\alpha)$ und $ab\alpha$.

Aufgabe 1. — Ein Dreieck zu berechnen aus einer Seite und zwei Winkeln. $(a\beta\gamma)$ *)

Lösung: 1) $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$; 2) $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$;

3) $b = 2r\,.\,\sin\beta$; 4) $c = 2r\,.\,\sin\gamma$.

Aufgabe 2. — Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel. $(ab\alpha)$

Lösung: 1) $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$; 2) $\sin\beta = \frac{b}{2r}$;

3) $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$; 4) $c = 2r\,.\,\sin\gamma$.

Anm. Hinsichtlich der beiden Fälle $a > b$ und $a < b$ s. die Anm. am Schluss von Nr. 47.

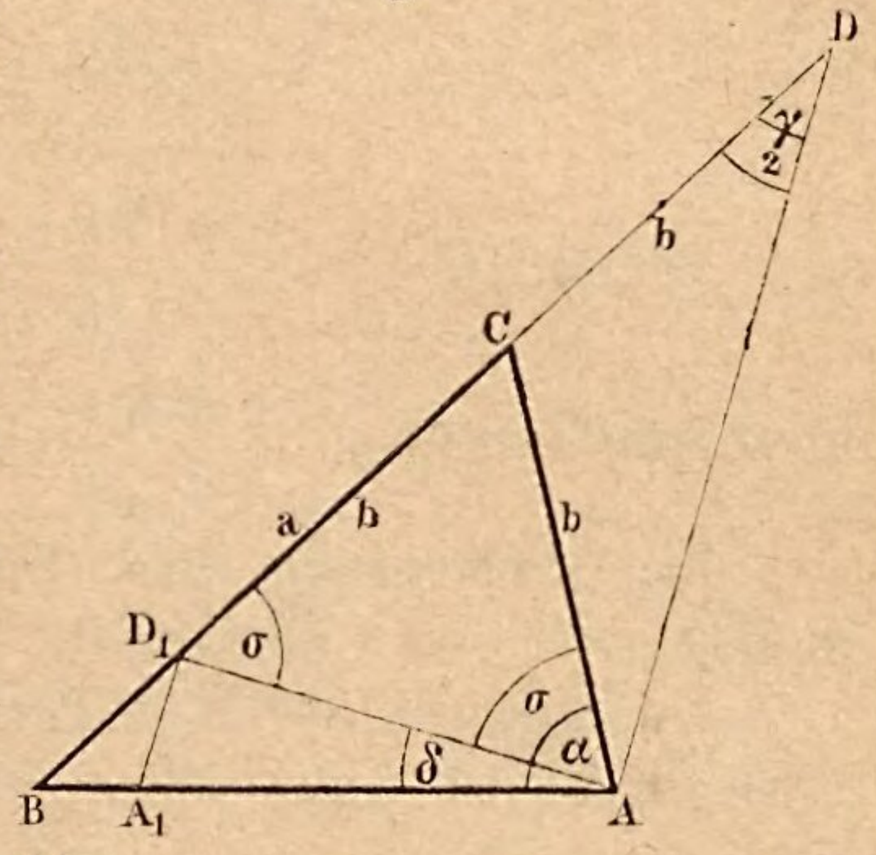
---

*) Beispiele zu dieser und den folgenden Aufgaben s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

b. Der Tangentialsatz.

52. *Vorbemerkung.* — Eine dritte Methode, ein gegebenes schiefwinkliges Dreieck durch rechtwinklige zu ersetzen, besteht darin, dass man erstens aus einer Ecke (C) mit der Seite b einen Kreis beschreibt, welcher die Seite a in D_1 und ihre Verlängerung in D schneidet, sodass (Fig. 11)

Fig. 11.



1) $BD = a + b$, $BD_1 = a - b$

ist. Verbindet man dann D und D_1 mit A, so ist Dreieck $\overline{DAD_1}$ bei A rechtwinklig (Th. II, 165), Winkel $D_1DA = \frac{\gamma}{2}$ (Th. II, 101),

Winkel $DD_1A = R - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$

$= \sigma$ (45). Und

$$2) \qquad tg\,\sigma = \frac{AD}{AD_1}.$$

Errichtet man zweitens $D_1A_1 \perp D_1A$, so ist Dreieck $\overline{AD_1A_1}$ bei D_1 rechtwinklig, und Winkel $D_1AA_1 = \alpha - \sigma = \delta$ (45a). Demnach

$$3) \qquad tg\,\delta = \frac{A_1D_1}{AD_1}.$$

Dividirt man nun 2) durch 3), so folgt:

$$4) \qquad \frac{tg\,\sigma}{tg\,\delta} = \frac{AD}{A_1D_1}.$$

Nun ist aber $AD \parallel A_1D_1$ (Th. II, 72), folglich Dreieck $\overline{BA_1D_1} \sim \overline{BAD}$ (Th. II, 239), und folglich

$$5) \qquad \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{BD}{BD_1} = \frac{a+b}{a-b} \text{ [nach 1)]}.$$

Durch Vergleichung von 4) und 5) folgt endlich:

$$6) \qquad \frac{tg\,\sigma}{tg\,\delta} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Zwei weitere Formeln von gleicher Gestalt erhält man durch Vertauschung zwischen den Buchstaben $\alpha\beta\gamma$ und abc. Alle zusammen enthalten den Satz (Tangentialsatz):

Die Tangens der halben Summe zweier Winkel im Dreieck verhält sich zur Tangens ihrer halben Differenz, wie die Summe ihrer Gegenseiten zur Differenz derselben. 80.

53. *Ableitung des Tangentialsatzes aus dem Sinussatze.* — Aus der Formel des Sinussatzes

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

folgt (nach Th. I, 105):

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta},$$

oder (nach 46)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2 \,.\, \sin\sigma \,.\, \cos\delta}{2 \,.\, \cos\sigma \,.\, \sin\delta},$$

oder (nach 26)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\sigma}{tg\,\delta}.$$

54. *Anwendung des Tangentialsatzes.* — Derselbe dient ebenso wie der Cosinussatz zur Lösung der Aufgabe $ab\gamma$.

Aufgabe 3. — Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. ($ab\gamma$)

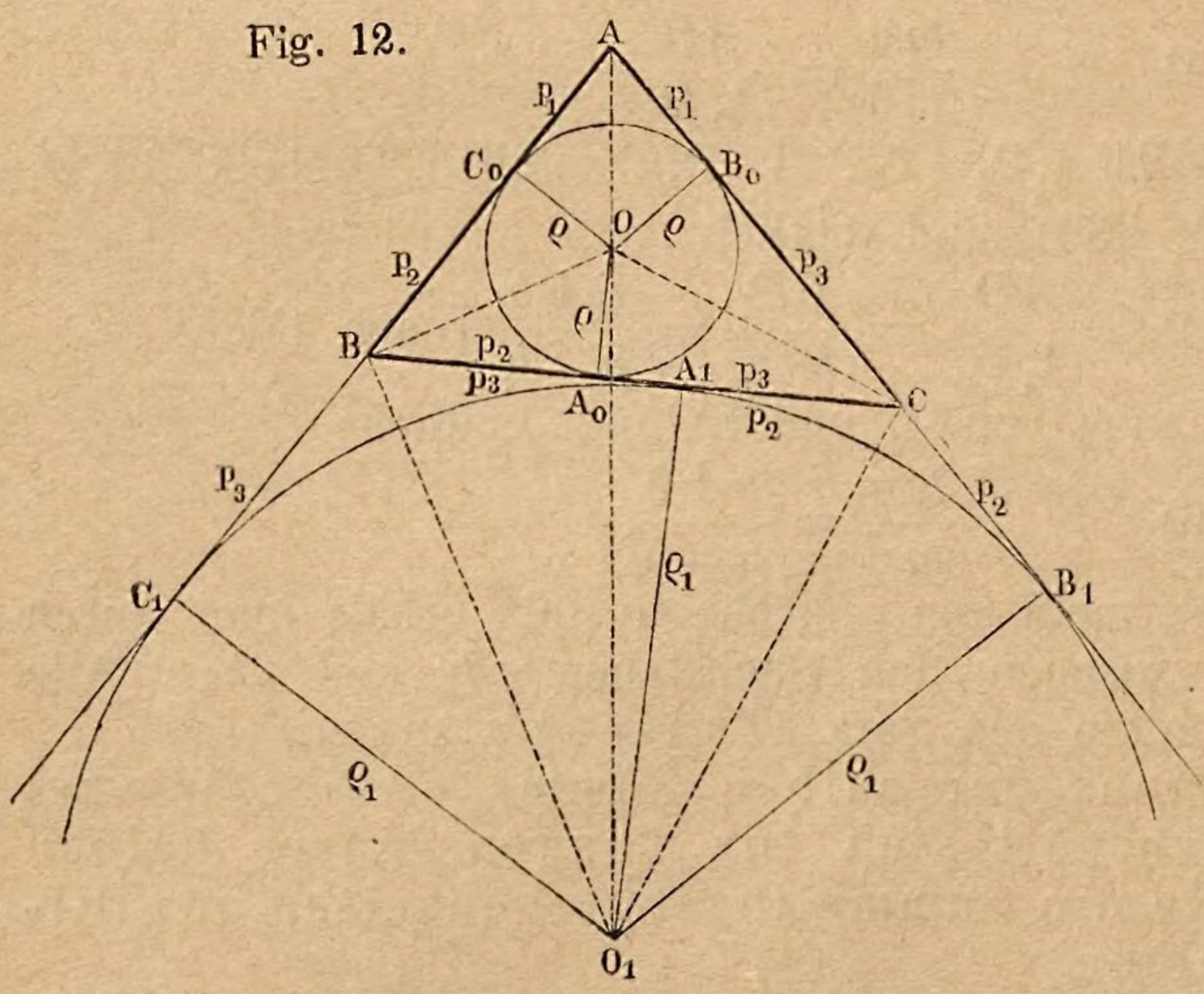
Lösung: 1) $\sigma = R - \frac{\gamma}{2}$; 2) $tg\,\delta = \frac{(a-b)\,tg\,\sigma}{a+b}$; 3) $\begin{cases}\alpha = \sigma + \delta \\ \beta = \sigma - \delta;\end{cases}$

4) $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$; 5) $c = 2r \,.\, \sin\gamma$.

c. Der Satz vom einbeschriebenen Kreise.

55. *Vorbemerkung.* — Eine vierte Methode, ein gegebenes schiefwinkliges Dreieck durch rechtwinklige zu ersetzen, besteht darin, dass man die Mittelpunkte der Berührungskreise mit den Ecken des Dreiecks und den zugehörigen Berührungspunkten auf den Seiten verbindet (wie es Fig. 12 für den aus O beschriebenen Inkreis

Fig. 12.



und den aus O_1 beschriebenen Ankreis zeigt). Dann ist in dem Hilfsdreiecke OAC_0 der Winkel $OAC_0 = \frac{\alpha}{2}$ (Th. II, 196), und die Seite $AC_0 = p_1 = \frac{b+c-a}{2}$ [Th. II, Nr. 99, Formeln 6)].

Aus der Betrachtung des Dreiecks $\overline{OAC_0}$ ergiebt sich nun die Formel:

$$1a) \qquad tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{p_1},$$

und hieraus durch Vertauschung der Buchstaben:

$$1b) \quad tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{p_2}; \quad 1c) \quad tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{p_3}.$$

Diese drei Formeln enthalten zusammen den Satz:

Die Tangens eines halben Winkels im Dreieck ist gleich dem Quotienten aus dem Radius des Inkreises und der um die halbe Gegenseite verminderten halben Summe der einschliessenden Seiten. 81.

56. *Bestimmung von ϱ durch die Seiten des Dreiecks.* — Um mittelst der in 81 enthaltenen Formeln die Winkel eines Dreiecks aus seinen Seiten berechnen zu können, ist es noch nöthig, die in jenen Formeln enthaltene Grösse ϱ durch die Seiten auszudrücken.

Nun ist erstens im Dreieck $\overline{O_1AC_1}$ die Seite $AC_1 = c + p_3$ (Th. II, 205) $= p_1 + p_2 + p_3$ [Th. II, Nr. 99, Formeln 1)] $= p$ [daselbst Formel 3)]. Mithin ergiebt sich aus der Betrachtung dieses Dreiecks:

$$2) \qquad tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_1}{p}.$$

Zweitens ist im Dreieck $\overline{O_1BA_1}$ die Seite $BA_1 = p_3$ (Th. II, 204), und der Winkel $O_1BA_1 = R - \frac{\beta}{2}$ (Th. II, 196, Anm. z. 122). Mithin ergiebt sich aus der Betrachtung dieses Dreiecks:

$$3) \qquad cot\left(R - \frac{\beta}{2}\right) = tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{p_3}{\varrho_1}.$$

Durch Multiplication der Formeln 2) und 3) erhält man

$$tg\,\frac{\alpha}{2} \cdot tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{p_3}{p},$$

und, wenn man $tg\frac{\alpha}{2}$ und $tg\frac{\beta}{2}$ durch ihre aus 1) folgenden Werthe ersetzt:

$$\frac{\varrho^2}{p_1 p_2} = \frac{p_3}{p},$$

82. oder: $$\varrho = \sqrt{\frac{p_1 p_2 p_3}{p}}.$$

57. *Ableitung des Satzes vom einbeschriebenen Kreise aus dem Cosinussatze.* — Aus der Formel des Cosinussatzes

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\alpha$$

folgt $$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Addirt man diese Formel zu $1 = 1$, so folgt:

$$1 + \cos\alpha = \frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{2p \,.\, 2p_1}{2bc} = \frac{2pp_1}{bc};$$

$$\frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{pp_1}{bc}; \quad \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{pp_1}{bc}},$$

oder nach (42)

83. $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{pp_1}{bc}}; \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{pp_2}{ca}}; \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{pp_3}{ab}}.$$

Subtrahirt man $1 = 1$ von der Formel für $\cos\alpha$, so folgt:

$$\cos\alpha - 1 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc - a^2}{2bc} = \frac{(b-c)^2 - a^2}{2bc},$$

oder, wenn man auf beiden Seiten mit (-1) multiplicirt:

$$1 - \cos\alpha = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$= \frac{2p_3 \,.\, 2p_2}{2bc} = \frac{2p_2 p_3}{bc};$$

$$\frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{p_2 p_3}{bc}; \quad \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{p_2 p_3}{bc}},$$

oder (nach 43)

84. $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p_2 p_3}{bc}}; \quad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p_3 p_1}{ca}}; \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p_1 p_2}{ab}}.$$

Anm. Wodurch unterscheiden sich die Formeln 83 und 84, und wie sind dieselben zu merken?

Dividirt man die ersten der Formeln 83 und 84 durch einander, so folgt:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p_2p_3}{pp_1}}=\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{pp_1^{\,2}}}=\frac{1}{p_1}\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}},$$

oder, wenn man die Wurzelgrösse zur Abkürzung gleich ϱ setzt:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{p_1}.$$

Anm. Man erkennt leicht, dass die Wurzelgrösse sich durch die Vertauschungen, welche $tg\frac{\alpha}{2}$ in $tg\frac{\beta}{2}$ und $tg\frac{\gamma}{2}$ überführen, nicht ändert. — Die geometrische Bedeutung von ϱ geht wieder aus Fig. 12 hervor.

58. *Anwendung des Satzes vom einbeschriebenen Kreise.* — Derselbe dient ebenso wie der Cosinussatz zur Lösung der Aufgabe *abc*.

Aufgabe 4. — Ein Dreieck zu berechnen aus den drei Seiten. (*abc*)

Lösung: 1) $p=\frac{a+b+c}{2}$; $p_1=p-a$; $p_2=p-b$; $p_3=p-c$

[Th. II, Nr. 99, Formeln 5)]; 2) $\varrho=\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}$;

3) $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{p_1}$; $tg\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{p_2}$; $tg\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{p_3}$.

59. *Formeln zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks.* — Die Fläche eines Dreiecks kann entweder durch Seiten und Winkel allein, oder durch r und die Winkel, oder durch ϱ und die Seiten ausgedrückt werden.

1) Wenn man in der Formel

$$f^2=\frac{ah_1}{2}\quad\text{(Th. II, 354)}$$

h_1 durch seinen Werth $b\,.\,\sin\gamma$ ersetzt (Fig. 9, S. 42), so folgt:

$$f^2=\frac{ab\,.\,\sin\gamma}{2},\qquad 85.$$

woraus zwei weitere Formeln durch Vertauschung sich ergeben. Alle drei zusammen enthalten den Satz:

Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben Product aus zwei Seiten und dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

2) Wenn man in der Formel 85 a und b durch ihre Werthe $2r\,.\,\sin\alpha$ und $2r\,.\,\sin\beta$ ersetzt [Nr. 50, Formeln 2)], so folgt:

$$f^2=2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.\qquad 86.$$

In Worten: Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem doppelten Product aus dem Quadrat des Radius des Umkreises, und den Sinus seiner drei Winkel.

3) Nach Th. II, 357 ist

87. $$f^2 = p\varrho.$$

In Worten: Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem Product aus seinem halben Umfang und dem Radius des Inkreises.

Anm. Wenn man in 85 $\sin\gamma$ durch seinen Werth $\frac{c}{2r}$ ersetzt [Nr. 50, Formeln 1)], so folgt:

88. $$f^2 = \frac{abc}{4r}.$$

In Worten? — Wenn man in 87 ϱ durch seinen aus 82 folgenden Werth ersetzt, so folgt

89. $$f^2 = \sqrt{pp_1 p_2 p_3}.$$

Noch andere Formeln s. in der folgenden Nr. (Formeln 91.)

60. *Erweiterung. Der Satz vom anbeschriebenen Kreise.* — Aus der Betrachtung des Dreiecks $\overline{O_1AC_1}$ (Fig. 12) folgt [Nr. 56, Formel 2)]:

1a) $$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_1}{p},$$

und hieraus durch Vertauschung der Buchstaben:

1b) $$tg\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho_2}{p};$$ 1c) $$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_3}{p}.$$

Diese drei Formeln enthalten zusammen den Satz:

90. Die Tangens eines halben Winkels im Dreieck ist gleich dem Quotienten aus dem Radius des der gegenüberliegenden Seite anbeschriebenen Kreises und dem halben Umfange des Dreiecks.

Setzt man die aus 81 und 90 folgenden Werthe für $tg\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\beta}{2}$, $tg\frac{\gamma}{2}$ einander gleich, so folgt:

$$\frac{\varrho}{p_1} = \frac{\varrho_1}{p};\quad \frac{\varrho}{p_2} = \frac{\varrho_2}{p};\quad \frac{\varrho}{p_3} = \frac{\varrho_3}{p},$$

oder (mit Rücksicht auf 87)

91. 2) $$f^2 = p\varrho = p_1\varrho_1 = p_2\varrho_2 = p_3\varrho_3.$$

Aus der Betrachtung des Dreiecks $\overline{O_1BA_1}$ (Fig. 12) folgt [Nr. 56, Formel 3)]:

3a) $$tg\frac{\beta}{2} = \frac{r_3}{\varrho_1},$$

und hieraus durch Vertauschung der Buchstaben:

3b) $$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{r_1}{\varrho_2};\ tg\frac{\alpha}{2} = \frac{r_2}{\varrho_3}.$$ 92.

Endlich folgt aus 2)

$$\frac{r_3}{\varrho_1} = \frac{r_1}{\varrho_3};\quad \frac{r_1}{\varrho_2} = \frac{r_2}{\varrho_1};\quad \frac{r_2}{\varrho_3} = \frac{r_3}{\varrho_2}.$$

Dies in den Formeln 3) eingesetzt, giebt:

4a) $tg\frac{\beta}{2} = \frac{r_1}{\varrho_3}$; 4b) $tg\frac{\gamma}{2} = \frac{r_2}{\varrho_1}$; 4c) $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{r_3}{\varrho_2}$. 93.

Zusammenstellung der in 81, 90, 92, 93 enthaltenen Werthe für $tg\frac{\alpha}{2}$, $tg\frac{\beta}{2}$, $tg\frac{\gamma}{2}$.

	81.	90.	92.	93.
$tg\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\varrho}{r_1}$	$\frac{\varrho_1}{r}$	$\frac{r_2}{\varrho_3}$	$\frac{r_3}{\varrho_2}$
$tg\frac{\beta}{2}$	$\frac{\varrho}{r_2}$	$\frac{\varrho_2}{r}$	$\frac{r_3}{\varrho_1}$	$\frac{r_1}{\varrho_3}$
$tg\frac{\gamma}{2}$	$\frac{\varrho}{r_3}$	$\frac{\varrho_3}{r}$	$\frac{r_1}{\varrho_2}$	$\frac{r_2}{\varrho_1}$

94.

Anm. Welche Formeln ergeben sich durch Gleichsetzung der Werthe 81 und 92, 90 und 92? — Wie lassen sich die Formeln 91 direct aus Fig. 12 ableiten?

61. *Berechnung des Dreiecks aus anderen Stücken als Seiten und Winkeln.* — Sind zur Berechnung des Dreiecks andere Stücke als Seiten und Winkel gegeben, so sucht man dieselben durch die Seiten auszudrücken. Dadurch erhält man drei Gleichungen, aus denen sich die drei Seiten bestimmen lassen. (Diese Gleichungen sind dann von höherem, als dem zweiten Grade, wenn 2 Seiten und eine der Grössen ϱ, oder zwei Höhen und eine der Grössen r gegeben sind.) Die folgenden Formeln, welche bereits oben gefunden sind, oder aus oben gefundenen sich unmittelbar ergeben, zeigen, wie verschiedene Stücke des Dreiecks sich durch die Seiten ausdrücken lassen. (Formeln, welche sich durch blosse Vertauschung der Buchstaben finden lassen, sind weggelassen.)

$$f^2 = \sqrt{pp_1p_2p_3};\ \sin\alpha = \frac{2f^2}{bc};\ \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p_2p_3}{bc}};\ \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{pp_1}{bc}};$$

$$\varrho = \frac{f^2}{p};\ \varrho_1 = \frac{f^2}{p_1};\ r = \frac{abc}{4f^2};$$

95. $$h_1 = \frac{2f^2}{a};\ t_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\frac{a^2}{2}\right)}$$ (Th. II, 366).

Ist m_1 die Halbirungslinie des Winkels α, welche die Seite a in die Abschnitte a_1 (an b) und a_2 (an c) theilt, so folgt aus Betrachtung der Theildreiecke:

$$\frac{m_1}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a_1}{\sin\frac{\alpha}{2}};\ \frac{m_1}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a_2}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$

Daher:
$$\frac{b+c}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit $\frac{m_1}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)}$ folgt:

$$\frac{m_1(b+c)}{\sin\gamma} = \frac{ab}{\sin\frac{\alpha}{2}};\ \text{oder:}\ m_1(b+c)\sin\frac{\alpha}{2} = ab\,.\,\sin\gamma = 2f^2;$$

also
$$m_1 = \frac{2f^2}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}},$$

oder, wenn man für f^2 und $\sin\frac{\alpha}{2}$ die Werthe 89 und 84 setzt:

96. $$m_1 = \frac{2\sqrt{pp_1bc}}{(b+c)}.$$

Anm. Statt auf die Bestimmung durch die drei Seiten lassen sich viele Aufgaben mittelst der früher abgeleiteten Formeln einfacher auf eine andere der vier Hauptaufgaben zurückführen. (Näheres s. in den „Uebungsaufgaben“.)

B. Die Auflösung von Gleichungen.

I. Die Gleichung vom zweiten Grade.

62. *Vorbemerkung.* — Betrachtet man die Formel **41**

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$$

als Gleichung, in welcher $tg\,\alpha$ die Unbekannte ist, und bringt diese Gleichung (nach Th. I, Nr. 92) auf die Normalform, so erhält man die gemischt-quadratische Gleichung

$$(1) \qquad tg^2\,\alpha + \frac{2}{tg\,2\alpha} \cdot tg\,\alpha = 1.$$

Ersetzt man ferner in der Formel 40

$$sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha$$

$cos\,\alpha$ durch seinen Werth $\sqrt{1 - sin^2\,\alpha}$ (aus 38), betrachtet diese Formel als Gleichung, in welcher $sin^2\,\alpha$ die Unbekannte ist, und bringt diese Gleichung auf die Normalform, so erhält man die gemischt-quadratische Gleichung

$$(2) \qquad sin^4\,\alpha - sin^2\,\alpha = -\frac{sin^2\,2\alpha}{4}.$$

Ist nun eine gemischt-quadratische Gleichung

$$(3) \qquad x^2 + ax = \pm b$$

gegeben, so kann man, um dieselbe aufzulösen, zunächst (1) oder (2) Glied für Glied mit einem vorläufig noch unbestimmten Factor λ^2 multipliciren, und erhält

$$(4) \qquad \lambda^2\,tg^2\,\alpha + \frac{2\lambda^2}{tg\,2\alpha} \cdot tg\,\alpha = \lambda^2,$$

$$(5) \qquad \lambda^2\,sin^4\,\alpha - \lambda^2\,sin^2\,\alpha = -\frac{\lambda^2\,sin^2\,2\alpha}{4}.$$

Setzt man nun die drei Glieder der Gleichung (3) der Reihe nach gleich den drei Gliedern der Formel (4) oder der Formel (5), so erhält man drei Gleichungen, durch welche die Grössen α, λ, x vollkommen bestimmt sind.

Anm. Die Grösse α ist ebenso wie λ zuerst unbestimmt, weil (1) und (2) in Wahrheit Formeln sind, die für jeden Werth von α gelten. Die Multiplication von (1) oder (2) mit λ^2 ist nothwendig, weil sonst die Gleichsetzung von (3) mit (1) oder (2) drei Gleichungen mit nur zwei Unbekannten liefern würde (vgl. Th. I, Nr. 96). — Die Grössen α und λ sind also in Bezug auf die Gleichung (3) als Hilfsgrössen zu betrachten, durch

deren Einführung, wie sogleich sich ergeben wird, die Lösung der vorgelegten Gleichung bewerkstelligt werden kann. — Da die rechte Seite von (1) positiv, die von (2) negativ ist, so muss man die Formel (1) oder (2) anwenden, je nachdem in der vorgelegten Gleichung (3) die Grösse b positiv oder negativ ist. Andernfalls würde man für λ und $\sin\alpha$, bezw. $tg\,\alpha$ imaginäre Werthe erhalten, die zur Bestimmung von x unbrauchbar sind.

Erster Fall: $x^2 + ax = +b$.

63. Durch Gleichsetzung der Glieder dieser Gleichung mit denen der Formel (4)

$$\lambda^2\,tg^2\,\alpha + \frac{2\lambda^2}{tg\,2\alpha}\,.\,tg\,\alpha = \lambda^2$$

erhält man die drei Gleichungen:

$$(6a)\;\; x^2 = \lambda^2\,tg^2\,\alpha;\;\; (6b)\;\; ax = \frac{2\lambda^2\,tg\,\alpha}{tg\,2\alpha};\;\; (6c)\;\; b = \lambda^2,$$

oder, durch Elimination von λ^2:

$$x^2 = b\,.\,tg^2\,\alpha;\;\; ax = \frac{2b\,tg\,\alpha}{tg\,2\alpha},$$

oder, wenn man aus der ersten dieser Gleichungen x bestimmt, und den gefundenen Werth in der zweiten einsetzt, die $\sqrt{b}$ aber mit dem Zeichen + nimmt:

$$(7a)\qquad x = \sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha;\;\; a\sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha = \frac{2b\,.\,tg\,\alpha}{tg\,2\alpha};$$

$$(7b)\qquad tg\,2\alpha = \frac{2b}{a\sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{b}}{a}.$$

Nun ist nach 29 $tg\,(2R-\alpha) = -tg\,\alpha$, oder $tg\,\alpha = -tg\,(2R-\alpha)$, oder, da nach 30 $tg\,(-\varphi) = -tg\,\varphi$ ist: $tg\,\alpha = tg\,(\alpha - 2R)$; $tg\,2\alpha = tg\,(2\alpha - 2R)$. Die Formel (7b) theilt sich also in die folgenden beiden:

$$tg\,2a = \frac{2\sqrt{b}}{a};\;\; tg\,(2\alpha - 2R) = \frac{2\sqrt{b}}{a}.$$

Setzt man nun $R - \alpha = \beta$, so ist $tg\,(-2\beta) = \dfrac{2\sqrt{b}}{a}$. Man kann also in (7a) für α auch $(-\beta)$ setzen, und erhält

$$x_1 = \sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha;\;\; x_2 = \sqrt{b}\,.\,tg\,(-\beta) = -\sqrt{b}\,.\,tg\,\beta.$$

Da endlich $tg\,\beta = cot\,\alpha$ ist, so folgt

97. $$(8)\;\; tg\,2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a};\;\; x_1 = +\sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha;\;\; x_2 = -\sqrt{b}\,.\,cot\,\alpha.$$

In den Formeln (8) ist die Lösung der gegebenen Gleichung vollständig enthalten. Ist a negativ, so ist $\sqrt{b}$ mit umgekehrtem Vorzeichen zu nehmen, damit 2α positiv bleibt.

Anm. Beispiele für diese und die folgenden Methoden s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“. Man verificire an den Werthen (8) die Beziehungen: $x_1 + x_2 = -a$; $x_1 x_2 = -b$ (Th. I, 113).

Zweiter Fall: $x^2 + ax = -b$.

64. Durch Gleichsetzung der Glieder dieser Gleichung mit denen der Formel (5)

$$\lambda^2 \sin^4\alpha - \lambda^2 \sin^2\alpha = -\frac{\lambda^2 \sin^2 2\alpha}{4}$$

erhält man die drei Gleichungen:

(9a) $x^2 = \lambda^2 \sin^4\alpha$; (9b) $ax = -\lambda^2 \sin^2\alpha$; $b = \frac{\lambda^2 \sin^2 2\alpha}{4}$,

oder, durch Elimination von λ^2:

$$x^2 = \frac{4b \sin^4\alpha}{\sin^2 2\alpha}; \quad ax = -\frac{4b \sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha},$$

oder, wenn man aus der ersten dieser Gleichungen x bestimmt, und den gefundenen Werth in der zweiten einsetzt, die $\sqrt{b}$ aber mit dem Zeichen − nimmt:

$$x = -\frac{2\sqrt{b} \,.\, \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}; \quad -\frac{2a\sqrt{b}\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} = -\frac{4b\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha},$$

oder

(10a) $x = -\sqrt{b} \,.\, tg\,\alpha$ (40, 26); (10b) $\sin 2\alpha = \frac{2b}{a\sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{b}}{a}$.

Nun ist nach 29 $\sin(2R - \alpha) = \sin\alpha$. Die Formel (10b) theilt sich also in die folgenden beiden:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}; \quad \sin(2R - 2\alpha) = \frac{2\sqrt{b}}{a}.$$

Setzt man nun $R - \alpha = \beta$, so ist $\sin 2\beta = \frac{2\sqrt{b}}{a}$. Man kann also in (10a) für α auch β setzen, und erhält

$$x_1 = -\sqrt{b} \,.\, tg\,\alpha; \quad x_2 = -\sqrt{b} \,.\, tg\,\beta.$$

Da endlich $tg\,\beta = cot\,\alpha$ ist, so folgt

(11) $\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}$; $x_1 = -\sqrt{b} \,.\, tg\,\alpha$; $x_2 = -\sqrt{b} \,.\, cot\,\alpha$. 98.

In den Formeln (11) ist die Lösung der gegebenen Gleichung vollständig enthalten. — Ist a negativ, so ist $\sqrt{b}$ mit umgekehrtem Vorzeichen zu nehmen.

Anm. Man verificire an den Werthen (11) die Beziehungen $x_1 + x_2 = -a$; $x_1 x_2 = b$. — Da die Funktion *tg* alle Werthe von 0 bis ∞ annehmen kann, so lässt sich mittelst der Formeln (8) der Winkel α stets bestimmen. Da aber die Funktion *sin* stets zwischen 0 und 1 liegt, so findet man durch die Formeln (11) nur dann einen Werth für α, wenn $2\sqrt{b} < a$, d. h. $a^2 > 4b$ ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so sind (nach Th. I, Nr. 101) die Wurzeln der Gleichung imaginär. Demnach werden auch Winkel, deren Sinus und Cosinus nicht zwischen 0 und 1 liegen, als imaginär zu betrachten sein.

65. *Reduction der algebraischen Lösung der gemischt-quadratischen Gleichung auf die trigonometrische Form.*

Erster Fall: $x^2 + ax = +b$.

Nach Th. I, Nr. 99, Anm. ist

$$x = \frac{\pm\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2},$$

oder (1) $$x = \frac{a}{2}\left[\pm\sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}} - 1\right].$$

Setzt man nun

(2) $$\frac{4b}{a^2} = tg^2\, 2\alpha,$$

(was zulässig ist, da b, also auch $\frac{4b}{a^2}$ positiv, also $tg\,\alpha$ reell ist), woraus

(3) $$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{tg\, 2\alpha}$$

folgt, und setzt (2) und (3) in (1) ein, so folgt:

$$x = \frac{\sqrt{b}}{tg\, 2\alpha}\left[\pm\sqrt{1 + tg^2\, 2\alpha} - 1\right],$$

oder, da

$$\pm\sqrt{1 + tg^2\, 2\alpha} - 1 = \pm\sqrt{\frac{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}} - 1 = \pm\frac{1}{\cos 2\alpha} - 1$$

$$= \frac{\pm 1 - \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

ist,

$$x = \frac{\sqrt{b}}{tg\, 2\alpha} \cdot \frac{(\pm 1 - \cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{b}\,(\pm 1 - \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha},$$

also (4) $$\begin{cases} x_1 = +\sqrt{b}\left(\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) = +\sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha & (44a) \\ x_2 = -\sqrt{b}\left(\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) = -\sqrt{b}\,.\,\cot\alpha & (44a). \end{cases}$$

Zweiter Fall: $x^2 + ax = -b$; $(a^2 > 4b)$.

Nach Th. I, Nr. 99, Anm. ist

$$x = \frac{\pm\sqrt{a^2 - 4b} - a}{2},$$

oder (5) $$x = \frac{a}{2}\left[\pm\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} - 1\right].$$

Setzt man nun

(6) $$\frac{4b}{a^2} = \sin^2 2\alpha,$$

(was zulässig ist, da b, also auch $\frac{4b}{a^2}$ positiv, überdies $\frac{4b}{a^2} < 1$, also $\sin\alpha$ reell ist), woraus

(7) $$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{b}}{\sin 2\alpha}$$

folgt, und setzt (6) und (7) in (5) ein, so folgt:

$$x = \frac{\sqrt{b}}{\sin 2\alpha}\left[\pm\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} - 1\right],$$

oder, da $\pm\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} - 1 = \pm\cos 2\alpha - 1$ ist,

$$x = \frac{\sqrt{b}}{\sin 2\alpha}(\pm\cos 2\alpha - 1) = \frac{\sqrt{b}\,(\pm\cos 2\alpha - 1)}{\sin 2\alpha};$$

also: (8) $$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{b}\left(\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) = -\sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha & (44a) \\ x_2 = -\sqrt{b}\left(\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) = -\sqrt{b}\,.\,\cot\alpha & (44a). \end{cases}$$

II. Die Gleichung vom dritten Grade.

Erster Fall: $y^3 - 3py = 2q$ $(p^3 > q^2)$.

66. *Vorbemerkung.* — Setzt man in der Formel 34

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$\beta = 2\alpha$, so folgt:

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin\alpha \,.\, \cos 2\alpha + \cos\alpha \,.\, \sin 2\alpha \\ &= \sin\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha \quad (39,\ 40) \\ &= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha\,(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha, \end{aligned}$$

oder: $$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Betrachtet man diese Formel als Gleichung, in welcher $\sin\alpha$ die Unbekannte ist, und bringt diese Gleichung auf die Normalform, so erhält man die cubische Gleichung

$$(1) \qquad \sin^3\alpha - \frac{3}{4}\sin\alpha = -\frac{\sin 3\alpha}{4}.$$

Ist nun eine reducirte cubische Gleichung (vgl. Th. I, Nr. 109)

$$(2) \qquad y^3 - 3py = 2q$$

gegeben, so kann man, um dieselbe aufzulösen, zunächst (1) mit einem vorläufig noch unbestimmten Factor λ^3 multipliciren, und erhält

$$(3) \quad \lambda^3\sin^3\alpha - \frac{3\lambda^3\sin\alpha}{4} = -\frac{\lambda^3\sin 3\alpha}{4}.$$

Setzt man nun die drei Glieder der Gleichung (2) der Reihe nach gleich den drei Gliedern der Formel (3), so erhält man drei Gleichungen, durch welche die Grössen α, λ, x vollkommen bestimmt sind, nämlich

$$(4a)\ y^3 = \lambda^3\sin^3\alpha;\ (4b)\ py = \frac{\lambda^3\sin\alpha}{4};\ (4c)\ 2q = -\frac{\lambda^3\sin 3\alpha}{4},$$

oder, durch Elimination von λ^3:

$$y^3 = -\frac{8q\,.\,\sin^3\alpha}{\sin 3\alpha};\quad py = -\frac{2q\,.\,\sin\alpha}{\sin 3\alpha},$$

oder, wenn man aus der zweiten dieser Gleichungen y bestimmt, und den gefundenen Werth in der ersten einsetzt,

$$-\frac{8q^3\sin^3\alpha}{p^3\sin^3 3\alpha} = -\frac{8q\sin^3\alpha}{\sin 3\alpha};\quad \frac{q^2}{p^3\sin^2 3\alpha} = 1$$

$$(5a) \qquad \sin 3\alpha = \sqrt{\frac{q^2}{p^3}} = \frac{q}{\sqrt{p^3}}.$$

Setzt man diesen Werth in der ersten Gleichung ein, so folgt:

$$y^3 = -\frac{8q\,.\,\sin^3\alpha\sqrt{p^3}}{q};$$

oder $$(5b) \qquad y = -2\sqrt{p}\,.\,\sin\alpha.$$

Nun ist nach 29 $\sin(2R - \alpha) = \sin\alpha$. Ferner nach 30 $[\sin(-\alpha) =]\ \sin(4R - \alpha) = -\sin\alpha$, oder, wenn man hierin

$(2R+\alpha)$ für α setzt: $sin\,(2R-\alpha) = -sin\,(2R+\alpha) = sin\,(-2R-\alpha)$.
Es ist daher

$$sin\,3\alpha = sin\,(2R-3\alpha) = sin\,(-2R-3\alpha).$$

Setzt man nun $\left(\frac{2}{3}R-\alpha\right)=\beta$, $\frac{2}{3}R+\alpha=\gamma$, so ist

$$sin\,3\alpha = sin\,3\beta = sin\,(-3\gamma).$$

Man kann also in (5b) für α auch β oder $-\gamma$ setzen, und erhält

$$y_1=-2\sqrt{p}.sin\,\alpha;\ y_2=-2\sqrt{p}.sin\,\beta;\ y_3=-2\sqrt{p}.sin(-\gamma)=+2\sqrt{p}\,sin\,\gamma,$$

oder, indem man β und γ durch ihre Werthe ersetzt:

$$(6)\qquad sin\,3\alpha = \frac{q}{\sqrt{p^3}}; \qquad 99.$$

$$y_1=-2\sqrt{p}\,sin\,\alpha;\ y_2=-2\sqrt{p}.sin\left(\frac{2}{3}R-\alpha\right);\ y_3=+2\sqrt{p}.sin\left(\frac{2}{3}R+\alpha\right).$$

In den Formeln (6) ist die Lösung der gegebenen Gleichung vollständig enthalten. — Hier, wie in den folgenden Fällen ist, wenn q negativ, $\sqrt{p}$ mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen.

Anm. Der im Vorstehenden behandelte Fall der cubischen Gleichung ist derjenige, in welchem alle drei Wurzeln reell sind, aber durch die cardanische Formel in imaginärer Form gegeben werden (vgl. Th. I, Nr. 111). Umgekehrt giebt die obige Methode keine der Wurzeln in reeller Form, wenn $p^3 < q^2$ ist, da alsdann $sin\,3\alpha > 1$ sein würde. Die algebraische und die oben ausgeführte trigonometrische Methode zur Auflösung der cubischen Gleichung ergänzen sich also in der Weise, dass die Bestimmung einer reellen Wurzel der Gleichung in reeller Form durch die eine Methode gelingt, wenn die andere versagt. Und zwar führt die algebraische Methode zum Ziel, wenn in der Normalform $y^3+3py=2q$ entweder p positiv, oder p negativ und $p^3 < q^2$ ist, dagegen die trigonometrische Methode, wenn p negativ und $p^3 > q^2$ ist. — (Was ist über den Fall $p^3 = q^2$ zu bemerken?)

67. *Reduction der algebraischen Lösung der cubischen Gleichung auf die trigonometrische Form.*

Zweiter Fall: $y^3-3py=2q\ \ (p^3 < q^2)$.

Nach Th. I, Nr. 110 ist

$$(1)\quad y=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}.$$

Setzt man nun

$$(2)\qquad \frac{p^3}{q^2}=sin^2\,2\beta;\ \text{ also }\ q=\frac{\sqrt{p^3}}{sin\,2\beta}$$

(was zulässig ist, da p, also auch $\frac{p^3}{q^2}$ positiv, überdies $\frac{p^3}{q^2} < 1$, also $\sin 2\beta$ reell ist), und setzt in (1) für q seinen Werth, so ist zunächst

$$\sqrt[3]{q \pm \sqrt{q^2 - p^3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{p^3}}{\sin 2\beta} \pm \sqrt{\frac{p^3}{\sin^2 2\beta} - p^3}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{p^3} \pm \sqrt{p^3(1 - \sin^2 2\beta)}}{\sin 2\beta}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{p^3} \pm \cos 2\beta \sqrt{p^3}}{\sin 2\beta}} \qquad = \sqrt{p} \cdot \sqrt[3]{\frac{1 \pm \cos 2\beta}{\sin 2\beta}};$$

also nach 44a

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} = \sqrt{p} \cdot \sqrt[3]{\cot \beta}; \quad \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} = \sqrt{p} \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg} \beta}.$$

Setzt man weiter

$$(3) \qquad \sqrt[3]{\operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ also } \sqrt[3]{\cot \beta} = \cot \alpha,$$

so folgt:

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} = \sqrt{p} \cdot \cot \alpha; \quad \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} = \sqrt{p} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

und durch Einsetzung dieser Werthe in (1):

$$y = \sqrt{p}\,(\operatorname{tg} \alpha + \cot \alpha) = \sqrt{p}\left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}\right) = \frac{2\sqrt{p}}{\sin 2\alpha}.$$

Die Lösung der gegebenen Gleichung ist also in folgenden Formeln enthalten:

100. $$(4) \quad \sin 2\beta = \frac{\sqrt{p^3}}{q}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \beta}; \quad y = \frac{2\sqrt{p}}{\sin 2\alpha}.$$

Anm. Dieses Verfahren liefert nur die reelle Wurzel der Gleichung, nicht aber die beiden imaginären. Man kann zwar in (4) für 2β auch $(2R - 2\beta)$, d. h $R - \beta$ für β setzen Dadurch verwandelt sich aber in der zweiten Formel nur $\operatorname{tg} \beta$ in $\cot \beta$, $\operatorname{tg} \alpha$ in $\cot \alpha$, also α in $R - \alpha$, 2α in $(2R - \alpha)$, we che Verwandlung $\sin 2\alpha$, also auch y ungeändert lässt. — Ueber die Bestimmung der imaginären Wurzeln s. die Anm. am Schluss von Nr. 112 in Th. I.

Dritter Fall: $y^3 + 3py = 2q$.

68. Nach Th. I, Nr. 110 ist

$$(5) \quad y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Setzt man nun

$$(6) \qquad \frac{p^3}{q^2} = tg^2\,2\beta, \text{ also } q = \sqrt{p^3}\,.\,cot\,2\beta,$$

und setzt in (5) für q seinen Werth, so ist zunächst

$$\sqrt[3]{q \pm \sqrt{q^2+p^3}} = \sqrt[3]{\sqrt{p^3}\,.\,cot\,2\beta \pm \sqrt{p^3\,(cot^2\,2\beta+1)}}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{p^3}\,.\,cot\,2\beta \pm \frac{\sqrt{p^3}}{sin\,2\beta}} = \sqrt{p}\,.\sqrt[3]{\frac{cos\,2\beta \pm 1}{sin\,2\beta}};$$

also nach 44a

$$\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2+p^3}} = \sqrt{p}\,.\sqrt[3]{cot\,\beta}; \quad \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2+p^3}} = -\sqrt{p}\,.\sqrt[3]{tg\,\beta}.$$

Setzt man weiter

$$(7) \qquad \sqrt[3]{tg\,\beta} = tg\,\alpha, \text{ also } \sqrt[3]{cot\,\beta} = cot\,\alpha,$$

so folgt:

$$\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2+p^3}} = \sqrt{p}\,.\,cot\,\alpha; \quad \sqrt[3]{q-\sqrt{q^2+p^3}} = \sqrt{p}\,.\,tg\,\alpha,$$

und durch Einsetzung dieser Werthe in (5)

$$y = \sqrt{p}(cot\,\alpha - tg\,\alpha) = \sqrt{p}\left(\frac{cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha}{sin\,\alpha\,cos\,\alpha}\right) = \frac{2\sqrt{p}.cos\,2\alpha}{sin\,2\,\alpha} = 2\sqrt{p}.\,cot\,2\alpha.$$

Die Lösung der gegebenen Gleichung ist also in folgenden Formeln enthalten:

$$(8)\ tg\,2\beta = \frac{\sqrt{p^3}}{q}; \quad tg\,\alpha = \sqrt[3]{tg\,\beta}; \quad y = 2\sqrt{p}\,.\,cot\,2\,\alpha. \qquad 101.$$

Anm. Auch dieses Verfahren liefert nur die reelle Wurzel der Gleichung. Vgl. die vorige Anm. — Warum lässt sich die trigonometrische Methode nicht zur Auflösung von Gleichungen höheren Grades anwenden? (S. Formel 58.)

Uebersicht der Formeln und Regeln.

(Zur Wiederholung.)

Reine Trigonometrie.

A. Die Winkelfunktionen als geschlossene Ausdrücke.

I. Funktionen spitzer Winkel.

1. Der Cosinus.

1. Der grössere von zwei spitzen Winkeln hat den kleineren Cosinus.
2. $cos\,0 = 1$.
3. $cos\,R = 0$.
4. $cos^2\alpha + cos^2\beta = 1$, $(\alpha+\beta=R)$.
5. $cos\,(\alpha+\alpha_1) = cos\,\alpha\,cos\,\alpha_1 - cos\beta cos\beta_1$, $(\alpha+\beta=\alpha_1+\beta_1=R)$.
6. $cos2\alpha = cos^2\alpha - cos^2\beta$, $(\alpha+\beta=R)$.
7. $cos\,\frac{\gamma}{2} = +\sqrt{\frac{1+cos\,\gamma}{2}}$.
8. $cos\,60^0 = \frac{1}{2}$.

2. Die übrigen Funktionen.

9. Sind a und b Katheten, c Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, so ist

$$sin\,\alpha = \frac{a}{c}, \quad cos\,\alpha = \frac{b}{c},$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b}, \quad cot\,\alpha = \frac{b}{a},$$

$$sec\,\alpha = \frac{c}{b}, \quad cosec\,\alpha = \frac{c}{a}.$$

10. Jede Funktion eines spitzen Winkels ist gleich der coordinirten Funktion seines Complementwinkels.
11. Nimmt ein spitzer Winkel zu, so nehmen seine directen Funktionen zu, seine indirecten ab.
12. $sin\,0 = 0$, $tg\,0 = 0$, $sec\,0 = 1$, $cos\,0 = 1$, $cot\,0 = \infty$, $cosec\,0 = \infty$.
13. $sin\,R = 0$, $tg\,R = \infty$, $sec\,R = \infty$, $cos\,R = 0$, $cot\,R = 0$, $cosec\,R = 1$.
14. $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$.
15. $\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = tg\,\alpha$.
16. $tg\,45^0 = 1$.
17. $cos\,72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

II. Funktionen beliebiger Winkel.

1. Der Cosinus.

18. Congruente Winkel haben gleiche Cosinus. — $cos\,(4nR \pm \alpha) = cos\,\alpha$.
19. $cos\,(-\alpha) = cos\,\alpha$.
20. $cos\,(2R - \alpha) = -cos\,\alpha$.
21. $cos\,0,\ R,\ 2R,\ 3R,\ 4R,\ \ldots = +1,\ 0,\ -1,\ 0,\ +1,\ \ldots$
22. Der Cosinus eines Winkels ist im ersten und vierten Qua-

dranten positiv, im zweiten und dritten negativ. — Der Cosinus eines Winkels nimmt zwischen $+1$ und -1 im ersten und zweiten Quadranten ab, im dritten und vierten zu.

23. Projicirt man von drei aus einem Punkte gehenden Strecken die erste auf die zweite, und diese Projection auf die dritte, so ist die letzte Projection, dividirt durch die dritte Strecke, gleich dem Producte der Cosinus der beiden Zwischenwinkel.

23ª. $cos\,(R+\alpha) = -\,cos\,(R-\alpha)$.

24. $cos\,(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,(R-\alpha)\,cos\,(R-\beta)$.

2. Die übrigen Funktionen.

25. $sin\,\alpha = cos\,(R-\alpha)$.

26. $tg\,\alpha = \dfrac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$.

27. $sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha}$; $cosec\,\alpha = \dfrac{1}{sin\,\alpha}$; $cot\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha}$.

28. $sin(R-\alpha) = cos\,\alpha$; $tg(R-\alpha) = cot\,\alpha$.

29. $cos\,(2R-\alpha) = -\,cos\,\alpha$;
$sin\,(2R-\alpha) = sin\,\alpha$;
$tg\,(2R-\alpha) = -\,tg\,\alpha$.

Supplementwinkel haben entgegengesetzte Sinus, aber gleiche Cosinus.

30. $cos(-\alpha) = cos\,\alpha$; $sin(-\alpha) = -sin\,\alpha$; $tg\,(-\alpha) = -\,tg\,\alpha$.

Entgegengesetzte Winkel haben entgegengesetzte Sinus, aber gleiche Cosinus.

31.

	sin	*cos*	*tg*	*cot*	*sec*	*cosec*
0	0	$+1$	0	$+\infty$	$+1$	$\mp\infty$
R	$+1$	0	$+\infty$	0	$\pm\infty$	$+1$
$2R$	0	-1	0	$-\infty$	-1	$\pm\infty$
$3R$	-1	0	$-\infty$	0	$\mp\infty$	-1
$4R$	0	$+1$	0	$+\infty$	$+1$	$\mp\infty$

32. $cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta - sin\,\alpha\,sin\,\beta$.

33. $cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\,cos\,\beta + sin\,\alpha\,sin\,\beta$.

34. $sin(\alpha+\beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sin\,\beta$.

35. $sin(\alpha-\beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sin\,\beta$.

36. $tg\,(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta}$.

37. $tg\,(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,tg\,\beta}$.

38. $cos^2\,\alpha + sin^2\,\alpha = 1$.

39. $cos\,2\alpha = cos^2\,\alpha - sin^2\,\alpha$.

39ª. $cos\,2\alpha = 1 - 2\,sin^2\,\alpha = 2\,cos^2\alpha - 1$.

40. $sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha$.

41. $tg\,2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$.

42. $cos\,\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+cos\,\beta}{2}}$.

43. $sin\,\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{1-cos\,\beta}{2}}$.

44. $tg\,\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{1-cos\,\beta}{1+cos\,\beta}}$.

44ª. $tg\,\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{sin\,\beta}{1+cos\,\beta} = \dfrac{1-cos\,\beta}{sin\,\beta}$.

45. $\sigma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$; $\delta = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

45ª. $\sigma + \delta = \alpha$; $\sigma - \delta = \beta$.

46. $sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\,sin\,\sigma\,cos\,\delta$.
$sin\,\alpha - sin\,\beta = 2\,cos\,\sigma\,sin\,\delta$.
$cos\,\beta + cos\,\alpha = 2\,cos\,\sigma\,cos\,\delta$.
$cos\,\beta - cos\,\alpha = 2\,sin\,\sigma\,sin\,\delta$.

B. Die Winkelfunktionen in transcendenter und Reihenform.

47. $\alpha = \frac{2R}{\pi} . x; \quad x = \frac{\pi\alpha}{2R}.$

48. $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$

49. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

50. $a_1 = {}^e\!l\, a.$

51. $a^x = 1 + a_1 x + \frac{a_1^2}{2!} x^2 + \frac{a_1^3}{3!} x^3 + \ldots$

51[a]. Eine unendliche Reihe convergirt, wenn ihr Quotient von irgend einem Gliede an beständig kleiner bleibt, als eine gegebene Zahl, die kleiner als Eins ist.

52. $e = 2{,}718281828 \ldots$

53. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

54. $e^{xi} = \cos x + i \sin x.$

55. $\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2};$

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.$$

56. $(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$
$= \cos(x + y) + i \sin(x + y).$

57. $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$

58. $\cos nx = \cos^n x - n^{\cdot 2} \cos^{n-2} x . \sin^2 x + n^{\cdot 4} \cos^{n-4} x . \sin^4 x - \ldots$

$\sin nx = n . \cos^{n-1} x . \sin x - n^{\cdot 3} \cos^{n-3} x . \sin^3 x + n^{\cdot 5} \cos^{n-5} x . \sin^5 x - \ldots$

59. $e^{-\frac{\pi}{2}} = i^i.$

60. $e^{4n . \frac{\pi}{2} i} = +1; \quad e^{(4n+1)\frac{\pi}{2} i} = +i;$
$e^{(4n+2)\frac{\pi}{2} i} = -1; \quad e^{(4n+3)\frac{\pi}{2} i} = -i.$

61. $\cos 4n . \frac{\pi}{2} = +1; \cos(4n+1)\frac{\pi}{2} = 0;$
$\cos(4n+2)\frac{\pi}{2} = -1; \cos(4n+3)\frac{\pi}{2} = 0.$

$\sin 4n . \frac{\pi}{2} = 0; \quad \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = +1;$

$\sin(4n+2)\frac{\pi}{2} = 0; \quad \sin(4n+3)\frac{\pi}{2} = -1.$

62. Eine reelle positive Zahl hat unendlich viele Logarithmen, von denen aber nur einer reell ist $(n = 0)$.

$${}^e\!l\, c = x + 2n\pi i.$$

62[a]. Eine reelle negative Zahl hat unendlich viele Logarithmen, die sämmtlich imaginär sind.

$${}^e\!l(-c) = x + (2n+1)\pi i.$$

63. $\frac{\pi}{2} = \frac{{}^e\!l\, i}{i}.$

64. $\sqrt[k]{1} = e^{\frac{2n\pi i}{k}}.$

65. $arctg\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$

66. Jede complexe Zahl $a \pm bi$ kann in der Form $ce^{\pm xi}$ dargestellt werden, wobei $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $x = arctg \frac{b}{a}$ ist.

67. ${}^e\!l(a \pm bi) = \frac{1}{2} {}^e\!l(a^2 + b^2) \pm i\, arctg \frac{b}{a}.$

68. $arctg\, z = \frac{1}{2i} {}^e\!l \frac{1 + zi}{1 - zi}.$

69. $^e l \frac{1+y}{1-y} = 2\left[y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 + \ldots\right]$.

70. $^e l n = 2\left[\frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5 + \ldots\right]$.

71. $^e l(p+q) = {}^e l p + 2\left[\frac{q}{2p+q} + \frac{1}{3}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^5 + \ldots\right]$.

72. $^e l p = \frac{1}{2}\left[{}^e l(p+1) + {}^e l(p-1)\right] + \frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^2-1}\right)^5 + \ldots$

73. $^e l p = \frac{1}{4}\left[{}^e l(p^2+1) + {}^e l(p+1) + {}^e l(p-1)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2p^4-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2p^4-1}\right)^5 + \ldots\right]$.

74. $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

75. $\frac{\pi}{4} = 8\,arctg\,\frac{1}{10} - 4\,arctg\,\frac{1}{515} - arctg\,\frac{1}{239}$.

Angewandte Trigonometrie.

A. Die Berechnung der Dreiecke.

I. Das rechtwinklige Dreieck.

76.

Gegeben:	Lösung:
1) a, c.	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.
2) a, b.	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.
3) b, α.	$c = \frac{b}{\cos\alpha}$; $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.
4) c, α.	$b = c.\cos\alpha$; $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

II. Das schiefwinklige Dreieck.

1. Erste Methode.

77. Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus ihrer Gegenwinkel (Sinussatz).

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

78. Das Quadrat einer Dreieckseite ist gleich der Summe der Quadrate der andern Seiten, vermindert um das doppelte Product aus diesen Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels (Cosinussatz).

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

2. Zweite Methode.

79. Der Sinus eines Winkels im Dreieck ist gleich dem Quotienten aus der gegenüberliegenden Seite und dem Durch-

messer des Umkreises. (Satz vom umbeschriebenen Kreise.)

$$\sin\alpha = \frac{a}{2r};\ \sin\beta = \frac{b}{2r};\ \sin\gamma = \frac{c}{2r}.$$

Aufgabe 1.

Ein Dreieck zu berechnen aus einer Seite und zwei Winkeln ($a\beta\gamma$).

Lösung: $\alpha = 2R - (\beta+\gamma)$; $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$;

$b = 2r \,.\, \sin\beta$; $c = 2r \,.\, \sin\gamma$.

Beispiel: $a = 510$; $\beta = 76^0\,19'$;

$\gamma = 35^0\,18'$.

Numeri		*Logarithmi*		*Nebenrechnung*
a	510	a	2,7076	
β	76. 19	$\sin\alpha$	9,9683	
γ	35. 18	$2r$	2,7393	
	111. 37	$\sin\beta$	9,9875	
α	68. 23	$\sin\gamma$	9,7618	
b	533	b	2,7268	
c	317	c	2,5011	

Aufgabe 2.

Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel ($ab\alpha$).

Lösung: $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$; $\sin\beta = \frac{b}{2r}$;

$\gamma = 2R - (\alpha+\beta)$; $c = 2r \,.\, \sin\gamma$.

Beispiel: $a = 450$; $b = 85$;

$\alpha = 87^0\,55'$.

Numeri		*Logarithmi*		*Nebenrechnung*
a	450	a	2,6532	
b	85	$\sin\alpha$	9,9997	
α	87. 55	$2r$	2,6535	
β	10. 53	b	1,9294	
	98. 48	$\sin\beta$	9,2759	
γ	81. 12	$\sin\gamma$	9,9949	
c	445	c	2,6484	

80. Die Tangens der halben Summe zweier Winkel im Dreieck verhält sich zur Tangens ihrer halben Differenz, wie die Summe ihrer Gegenseiten zur Differenz derselben (Tangentialsatz).

$$\frac{s}{d} = \frac{tg\,\sigma}{tg\,\delta};\ s = a+b;\ \sigma = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$d = a-b;\ \delta = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Aufgabe 3.

Ein Dreieck zu berechnen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ($ab\gamma$).

Lösung: $s = a+b$; $d = a-b$;

$\sigma = R - \frac{\gamma}{2}$; $tg\,\delta = \frac{d \,.\, tg\,\sigma}{s}$;

$\alpha = \sigma+\delta$; $\beta = \sigma-\delta$; $2r = \frac{a}{\sin\alpha}$;

$c = 2r \,.\, \sin\gamma$.

Beispiel: $a = 1196$; $b = 353$;

$\gamma = 39^0\,36'$.

Numeri		*Logarithmi*		*Nebenrechnung*
a	1196	$tg\,\sigma$	0,4437	
b	353	d	2,9258	
γ	39. 36		3,3695	
s	1549	s	3,1901	
d	843	$tg\,\delta$	0,1794	
σ	70. 12	a	3,0777	
δ	56. 31	$\sin\alpha$	9,9040	
α	126. 43	$2r$	3,1737	
β	13. 41	$\sin\gamma$	9,8044	
c	951	c	2,9781	

81. Die Tangens eines halben Winkels im Dreieck ist gleich dem

Quotienten aus dem Radius des Inkreises und der um die halbe Gegenseite verminderten halben Summe der einschliessenden Seiten. (Satz vom einbeschriebenen Kreise.)

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{p_1};\ tg\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{p_2};\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{p_3}.$$

$$p_1=\frac{b+c-a}{2};\ p_2=\frac{c+a-b}{2};$$

$$p_3=\frac{a+b-c}{2}.$$

82. $$\varrho=\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}}.$$

83. $$cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{pp_1}{bc}};\ cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{pp_2}{ca}};\ cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{pp_3}{ab}}.$$

84. $$sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p_2p_3}{bc}};\ sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p_3p_1}{ca}};\ sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p_1p_2}{ab}}.$$

Aufgabe 4.

Ein Dreieck zu berechnen aus den drei Seiten (abc).

Lösung: $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$; $p_1=p-a$; $p_2=p-b$; $p_3=p-c$;

$$\varrho=\sqrt{\frac{p_1p_2p_3}{p}};\ tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{p_1};$$

$$tg\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{p_2};\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{p_3}.$$

Beispiel: $a=1532$; $b=533$; $c=1299$.

Numeri		*Logarithmi*		*Nebenrechnung*
a	1532	p_1	2,1761	
b	533	p_2	3,0603	
c	1299	p_3	2,5832	
p	1682		7,8196	
p_1	150	p	3,2258	
p_2	1149	ϱ^2	4,5938	
p_3	383	ϱ	2,2969	
α	105. 44	$tg\,\alpha/2$	0,1208	
β	19. 34	$tg\,\beta/2$	9,2366	
γ	54. 42	$tg\,\gamma/2$	9,7137	

85. $f^2=\frac{1}{2}(ab\,.\,sin\,\gamma)$.

86. $f^2=2r^2\,.\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma$.

87. $f^2=p\varrho$.

88. $$f^2=\frac{abc}{4r}.$$

89. $$f^2=\sqrt{pp_1p_2p_3}.$$

90. Die Tangens eines halben Winkels im Dreieck ist gleich dem Quotienten aus dem Radius des der gegenüberliegenden Seite anbeschriebenen Kreises und dem halben Umfange des Dreiecks.

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho_1}{p};\ tg\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho_2}{p};\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho_3}{p}.$$

91. $f^2=p\varrho=p_1\varrho_1=p_2\varrho_2=p_3\varrho_3$.

92. $$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{p_2}{\varrho_3};\ tg\frac{\beta}{2}=\frac{p_3}{\varrho_1};\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{p_1}{\varrho_2}.$$

93. $$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{p_3}{\varrho_2};\ tg\frac{\beta}{2}=\frac{p_1}{\varrho_3};\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{p_2}{\varrho_1}.$$

94.

	81	90	92	93
$tg\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\varrho}{p_1}$	$\frac{\varrho_1}{p}$	$\frac{p_2}{\varrho_3}$	$\frac{p_3}{\varrho_2}$
$tg\frac{\beta}{2}$	$\frac{\varrho}{p_2}$	$\frac{\varrho_2}{p}$	$\frac{p_3}{\varrho_1}$	$\frac{p_1}{\varrho_3}$
$tg\frac{\gamma}{2}$	$\frac{\varrho}{p_3}$	$\frac{\varrho_3}{p}$	$\frac{p_1}{\varrho_2}$	$\frac{p_2}{\varrho_1}$

95. $h_1 = \frac{2f^2}{a}$; $t_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\frac{a^2}{2}\right)}$.

96. $m_1 = \frac{2\sqrt{pp_1bc}}{(b+c)}$.

B. Die Auflösung von Gleichungen.

I. Die Gleichung vom zweiten Grade.

Erster Fall: $x^2 + ax = +b$.

97. $tg\,2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}$; $x_1 = +\sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha$. $x_2 = -\sqrt{b}\,.\,cot\,\alpha$.

Beispiel: $x^2 + 13x = 140$.

Numeri		*Logarithmi*		*Nebenrechnung*
b	140	b	2,1461	
a	13	$\sqrt{b}$	1,0730	
2α	61. 13	2	0,3010	
α	30. 36,5	$2\sqrt{b}$	1,3740	
	$cot\,\alpha = tg\,\beta$	a	1,1139	
β	59. 23,5	$tg\,2\alpha$	0,2601	
		$tg\,\alpha$	9,7721	
		$tg\,\beta$	0,2280	
x_1	+7	x_1	0,8451	
x_2	−20	x_2	1,3010	

Zweiter Fall: $x^2 + ax = -b$.

98. $sin\,2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}$; $x_1 = -\sqrt{b}\,.\,tg\,\alpha$. $x_2 = -\sqrt{b}\,.\,cot\,\alpha$.

Beispiel: $x^2 - 13x = -22$.

Numeri		*Logarithmi*		*Nebenrechnung*
b	22	b	1,3424	
a	−13	$-\sqrt{b}$	0,6712	
2α	46. 11	2	0,3010	
α	23. 5,5	$-2\sqrt{b}$	0,9722	
	$cot\,\alpha = tg\,\beta$	$-a$	1,1139	
β	66. 54,5	$sin\,2\alpha$	9,8583	
		$tg\,\alpha$	9,6298	
		$tg\,\beta$	0,3702	
x_1	+2	x_1	0,3010	
x_2	+11	x_2	1,0414	

II. Die Gleichung vom dritten Grade.

Erster Fall: $y^3 - 3py = 2q \quad (p^3 > q^2)$.

99. $sin\,3\alpha = \frac{q}{\sqrt{p^3}}$; $y_1 = -2\sqrt{p}\,.\,sin\,\alpha$;

$$y_2 = -2\sqrt{p}\,.\,sin\left(\frac{2}{3}R - \alpha\right);$$

$$y_3 = +2\sqrt{p}\,.\,sin\left(\frac{2}{3}R + \alpha\right).$$

Beispiel: $y^3 - 15y = 4 \quad (5^3 > 2^2)$.

Numeri		*Logarithmi*		*Nebenrechnung*
q	2	q	0,3010	
p	5	p^3	2,0969	
3α	10. 18,3	$\sqrt{p^3}$	1,0484	
α	3. 26,1	$sin\,3\alpha$	9,2526	
$60^0 - \alpha$	56. 33,9	p	0,6990	
$60^0 + \alpha$	63. 26,1	$\sqrt{p}$	0,3495	
		2	0,3010	
		$2\sqrt{p}$	0,6505	
		$sin\,\alpha$	8,7775	
		$sin(60^0 - \alpha)$	9,9214	
		$sin(60^0 + \alpha)$	9,9515	
y_1	−0,268	y_1	9,4280	
y_2	−3,732	y_2	0,5719	
y_3	+4	y_3	0,6020	

Zweiter Fall: $y^3 - 3py = 2q \quad (p^3 < q^2)$.

100. $sin\,2\beta = \frac{\sqrt{p^3}}{q}$; $tg\,\alpha = \sqrt[3]{tg\,\beta}$;

$$y = \frac{2\sqrt{p}}{sin\,2\alpha}.$$

Beispiel: $y^3 - 9y = 80 \quad (3^3 < 40^2)$.

Numeri		*Logarithmi*		*Nebenrechnung*
p	3	p^3	1,4314	
q	40	$\sqrt{p^3}$	0,7157	

2β	7. 27,8	q	1,6021
β	3. 43,9	$\sin 2\beta$	9,1136
α	21. 55,5	$tg\,\beta$	28,8144
2α	43. 51	$tg\,\alpha$	9,6048
		p	0,4771
		$\sqrt{p}$	0,2385
		2	0,3010
		$2\sqrt{p}$	0,5395
		$\sin 2\alpha$	9,8406
y	$+5$	y	0,6989

Dritter Fall: $y^3 + 3py = 2q$.

101. $$tg\,2\beta = \frac{\sqrt{p^3}}{q};\quad tg\,\alpha = \sqrt[3]{tg\,\beta};$$

$$y = \frac{2\sqrt{p}}{tg\,2\alpha}.$$

Beispiel: $y^3 + 15y = 448$.

Numeri		*Logarithmi*		*Nebenrechnung*
p	5	p^3	2,0969	
q	224	$\sqrt{p^3}$	1,0484	
2β	2. 51,4	q	2,3502	
β	1. 25,7	$tg\,2\beta$	8,6982	
α	16. 17,2	$tg\,\beta$	28,3968	
2α	32. 34,4	$tg\,\alpha$	9,4656	
		p	0,6990	
		$\sqrt{p}$	0,3495	
		2	0,3010	
		$2\sqrt{p}$	0,6505	
		$tg\,2\alpha$	9,8054	
y	$+7$	y	0,8451	

Anhang.

Uebungssätze und Aufgaben.

1. Beliebige Winkel.

a) Formeln.

$sin\ \alpha =$ **1)** $\sqrt{1+cos\ \alpha}\ .\ \sqrt{1-cos\ \alpha}$, 2) $cos\ \alpha\ .\ tg\ \alpha$, 3) $tg\ \alpha : sec\ \alpha$, 4) $tg\ \alpha : \sqrt{1+tg^2\ \alpha}$, 5) $\sqrt{sec^2\ \alpha - 1} : sec\ \alpha$, 6) $1 : \sqrt{1+cot^2\ \alpha}$, 7) $1 : (cot\ {}^{\alpha}/_{2} - cot\ \alpha)$, 8) $1 : (tg\ {}^{\alpha}/_{2} + cot\ \alpha)$, 9) $2\,tg\ {}^{\alpha}/_{2} : (1+tg^2\ {}^{\alpha}/_{2})$, 10) $2\ sin\ {}^{\alpha}/_{2}\ cos\ {}^{\alpha}/_{2}$, 11) $2 : (tg\ {}^{\alpha}/_{2} + cot\ {}^{\alpha}/_{2})$, 12) $[sin\ ({}^{R}/_{3} + \alpha) - sin\ ({}^{R}/_{3} - \alpha)] : \sqrt{3}$, 13) $2\,sin^2\ ({}^{R}/_{2} + {}^{\alpha}/_{2}) - 1$, 14) $1 - 2\,sin^2\ ({}^{R}/_{2} - {}^{\alpha}/_{2})$, 15) $[1 - tg^2\ ({}^{R}/_{2} - {}^{\alpha}/_{2})] : [1 + tg^2\ ({}^{R}/_{2} - {}^{\alpha}/_{2})]$, 16) $sin\ ({}^{2}/_{3}\,R + \alpha) - sin\ ({}^{2}/_{3}\,R - \alpha)$.

$cos\ \alpha =$ **17)** $\sqrt{1+sin\ \alpha}\ .\ \sqrt{1-sin\ \alpha}$, 18) $sin\ \alpha\ .\ cot\ \alpha$, 19) $cot\ \alpha : cosec\ \alpha$, 20) $cot\ \alpha : \sqrt{1+cot^2\ \alpha}$, 21) $1 : \sqrt{1+tg^2\ \alpha}$, 22) $\sqrt{cosec^2\ \alpha - 1} : cosec\ \alpha$, 23) $cos^2\ {}^{\alpha}/_{2} - sin^2\ {}^{\alpha}/_{2}$, 24) $(cot^2\ {}^{\alpha}/_{2} - 1) : (cot^2\ {}^{\alpha}/_{2} + 1)$, 25) $1 : (tg\ \alpha\ cot\ {}^{\alpha}/_{2} - 1)$, 26) $sin\ 2\alpha : 2\ sin\ \alpha$, 27) $(1 - tg^2\ {}^{\alpha}/_{2}) : (1 + tg^2\ {}^{\alpha}/_{2})$, 28) $(cot\ {}^{\alpha}/_{2} - tg\ {}^{\alpha}/_{2}) : (cot\ {}^{\alpha}/_{2} + tg\ {}^{\alpha}/_{2})$, 29) $1 : (1 + tg\ \alpha\ tg\ {}^{\alpha}/_{2})$, 30) $2 : [tg\ ({}^{R}/_{2} + {}^{\alpha}/_{2}) + cot\ ({}^{R}/_{2} + {}^{\alpha}/_{2})]$, 31) $2\ cos\ ({}^{R}/_{2} + {}^{\alpha}/_{2})\ cos\ ({}^{R}/_{2} - {}^{\alpha}/_{2})$, 32) $cos\ ({}^{2}/_{3}\,R + \alpha) + cos\ ({}^{2}/_{3}\,R - \alpha)$, 33) $[sin\ ({}^{2}/_{3}\,R + \alpha) + sin\ ({}^{2}/_{3}\,R - \alpha)] : \sqrt{3}$, 34) $sin\ ({}^{R}/_{3} + \alpha) + sin\ ({}^{R}/_{3} - \alpha)$, 35) $[cos\ ({}^{R}/_{3} - \alpha) + cos\ ({}^{R}/_{3} + \alpha)] : \sqrt{3}$.

$tg\ \alpha =$ **36)** $\sqrt{(1 : cos^2\ \alpha) - 1}$, 37) $2\ tg\ {}^{\alpha}/_{2} : (1 - tg^2\ {}^{\alpha}/_{2})$, 38) $2\ cot\ {}^{\alpha}/_{2} : (cot^2\ {}^{\alpha}/_{2} - 1)$, 39) $2 : (cot\ {}^{\alpha}/_{2} - tg\ {}^{\alpha}/_{2})$, 40) $cot\ \alpha - 2\ cot\ 2\alpha$, 41) $(1 - cos\ 2\alpha) : sin\ 2\alpha$, 42) $sin\ 2\alpha : (1 + cos\ 2\alpha)$, 43) $[tg\ ({}^{R}/_{2} + {}^{\alpha}/_{2}) - tg\ ({}^{R}/_{2} - {}^{\alpha}/_{2})] : 2$, 44) $1 : \sqrt{cosec^2\ \alpha - 1}$, 45) $\sqrt{sec^2\ \alpha - 1}$, 46) $[tg\ ({}^{R}/_{2} + \alpha) - 1] : [tg\ ({}^{R}/_{2} + \alpha) + 1]$, 47) $[1 - tg\ ({}^{R}/_{2} - \alpha)] : [1 + tg\ ({}^{R}/_{2} - \alpha)]$.

$sec\ \alpha =$ **48)** $\sqrt{1+tg^2\ \alpha}$, 49) $\sqrt{1+cot^2\ \alpha} : cot\ \alpha$, 50) $cosec\ \alpha : \sqrt{cosec^2\ \alpha - 1}$.

$cosec\ \alpha =$ **51)** $\sqrt{1+cot^2\ \alpha}$, 52) $\sqrt{1+tg^2\ \alpha} : tg\ \alpha$, 53) $sec\ \alpha : \sqrt{sec^2\ \alpha - 1}$.

54) $\sin(R/2 \pm \alpha) = \cos(R/2 \mp \alpha) =$ 55) $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos\alpha \pm \sin\alpha)$. — 56) $tg\,(R/2 \pm \alpha) = (1 \pm tg\,\alpha) : (1 \mp tg\,\alpha) =$ 57) $(\cos\alpha \pm \sin\alpha) : (\cos\alpha \mp \sin\alpha) =$ 58) $\sqrt{1 \pm \sin 2\alpha} : \sqrt{1 \mp \sin 2\alpha}$. — 59) $tg(R/2 \pm \alpha/2) = \cos\alpha : (1 \mp \sin\alpha) =$ 60) $\sqrt{1 \pm \sin\alpha} : \sqrt{1 \mp \sin\alpha}$. — 61) $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2\sin(R/2 \pm \alpha)} =$ 62) $\sqrt{2\cos(R/2 \mp \alpha)}$. — 63) $tg\,(R/2 + \alpha) + tg\,(R/2 - \alpha) = \cot(R/2 + \alpha) + \cot(R/2 - \alpha) =$ 64) $2\sec 2\alpha$. — 65) $tg\,(R/2 + \alpha) - tg\,(R/2 - \alpha) = \cot(R/2 - \alpha) - \cot(R/2 + \alpha) =$ 66) $2\,tg\,2\alpha$. — 67) $tg\,(R/2 + \alpha)\,tg\,(R/2 - \alpha) = \cot(R/2 + \alpha)\cot(R/2 - \alpha) = 1$. — 68) $\sin(R/2 - \alpha/2) = \cot(R/2 + \alpha/2)$.

69) $tg\,\frac{1}{2}(\beta \pm \gamma) = (\sin\beta \pm \sin\gamma) : (\cos\beta + \cos\gamma)$. — 70) $tg\,\frac{1}{2}(\gamma \mp \beta) = (\cos\beta - \cos\gamma) : (\sin\gamma \pm \sin\beta)$. — 71) $tg\,\beta \pm tg\,\gamma = \sin(\beta \pm \gamma) : (\cos\beta\cos\gamma)$. — 72) $\cot\gamma \pm \cot\beta = \sin(\beta \pm \gamma) : (\sin\beta\sin\gamma)$. — 73) $tg\,\beta \pm \cot\gamma = \pm\cos(\beta \mp \gamma) : (\cos\beta\sin\gamma)$; 74) $\sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma) = 2\sin\beta\cos\gamma$. — 75) $\sin(\beta + \gamma) - \sin(\beta - \gamma) = 2\cos\beta\sin\gamma$. — 76) $\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma) = 2\cos\beta\cos\gamma$. — 77) $\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) = 2\sin\beta\sin\gamma$. — 78) $tg\,\frac{1}{2}(\beta + \gamma) + tg\,\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 2\sin\beta : (\cos\beta + \cos\gamma)$. — 79) $\cot\frac{1}{2}(\beta + \gamma) + \cot\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = +2\,s\,n\,\beta : (\cos\gamma - \cos\beta)$. — 80) $\sin(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) = \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma$. — 81) $\sin(\beta - \gamma)\cos(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\beta - \sin\gamma\cos\gamma$. — 82) $\sin(\beta + \gamma)\sin(\beta - \gamma) = \sin^2\beta - \sin^2\gamma$. — 83) $\cos(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) = \cos^2\gamma - \cos^2\beta$. — 84) $(\sin\beta + \sin\gamma) \pm (\cos\beta + \cos\gamma) = 2\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)\sqrt{1 \pm \sin(\beta + \gamma)}$. — 85) $(\sin\beta - \sin\gamma) \pm (\cos\beta + \cos\gamma) = 2\cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\sqrt{1 \pm \sin(\beta - \gamma)}$.

86) $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$. — 87) $\cos 3\varphi = \cos\varphi(1 - 4\sin^2\varphi)$. — 88) $\sin 4\varphi = \cos\varphi(4\sin\varphi - 8\sin^3\varphi)$. — 89) $\cos 4\varphi = 1 - 8\sin^2\varphi + 8\sin^4\varphi$. — 90) $\sin 5\varphi = 5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi$. — 91) $\cos 5\varphi = \cos\varphi(1 - 12\sin^2\varphi + 16\sin^4\varphi)$. — 92) $tg\,3\varphi = (3\,tg\,\varphi - tg^3\varphi) : (1 - 3\,tg^2\varphi)$. — 93) $\cot 3\varphi = (\cot\varphi - 3\,tg\,\varphi) : (3 - tg^2\varphi)$.

94) $\sin(x + y + z) = \sin x\cos y\cos z + \sin y\cos z\cos x + \sin z\cos x\cos y - \sin x\sin y\sin z$. — 95) $\cos(x + y + z) = \cos x\cos y\cos z - \cos x\sin y\sin z - \cos y\sin z\sin x - \cos z\sin x\sin y$. — 96) $\sin x\cos(y - z) - \sin y\cdot\cos(x - z) = \cos z\sin(x - y)$. — 97) $\sin\frac{1}{2}(x + z)\cos\frac{1}{2}(x - z) + \sin\frac{1}{2}(y - z)\cos\frac{1}{2}(y + z) = \frac{1}{2}(\sin x + \sin y)$. — 98) $\sin^2(x - y) + \sin^2(y - z) + \sin^2(z - x) = 2[1 - \cos(x - y)\cos(y - z)\cos(z - x)]$ — 99) $\cos^2(x - y) + \cos^2(y - z) + \cos^2(z - x) = 1 + 2\cos(x - y)\cos(y - z)\cos(z - x)$. — 100) $\sin(x - y) + \sin(x - z) + \sin$

$(y-z) = 4\cos \frac{1}{2}(x-y)\sin \frac{1}{2}(x-z)\cos \frac{1}{2}(y-z)$. — 101) $\cos(x-y) + \cos(x-z) + \cos(y-z) = 4\cos \frac{1}{2}(x-y)\cos \frac{1}{2}(x-z)\cos \frac{1}{2}(y-z) - 1$. — Setzt man

$$x+y+z = 2u;\ u-x = u_1;\ u-y = u_2;\ u-z = u_3,$$

so ist 102) $4\sin x \sin y \sin z = -\sin 2u + \sin 2u_1 + \sin 2u_2 + \sin 2u_3$. — 103) $4\cos x \cos y \cos z = \cos 2u + \cos 2u_1 + \cos 2u_2 + \cos 2u_3$. — 104) $\cos^2 u + \cos^2 u_1 + \cos^2 u_2 + \cos^2 u_3 = 2(1 + \cos x \cos y \cos z)$. — 105) $\sin^2 u + \sin^2 u_1 + \sin^2 u_2 + \sin^2 u_3 = 2(1 - \cos x \cos y \cos z)$.

b) Gleichungen.

106) $\sin x : \operatorname{tg} x = a$. — 107) $\sin x : \cot x = a$. — 108) $\sin x + \cos x = a$. — 109) $\sin x - \cos x = a$. — 110) $\operatorname{tg} x + \cot x = a$. — 111) $\operatorname{tg} x - \cot x = a$. — 112) $\cos x : \cos {}^{x}/_{2} = a$. — 113) $\cos x : \sin {}^{x}/_{2} = a$. — 114) $\sin x : \sin 2x = a$. — 115) $\sin x : \operatorname{tg} 2x = a$. — 116) $\sin x : \operatorname{tg} {}^{x}/_{2} = a$. — 117) $\cos x + \cos 2x = {}^{7}/_{8}$. — 118) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$. — 119) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$. — 120) $\sin(x+\alpha) + \cos(x-\alpha) = \cos(x+\alpha)$. — 121) $\sin(\alpha - x) = \cos(\alpha + x)$. — 122) $\operatorname{tg}({}^{R}/_{2} + x) - a \operatorname{tg} x = a - 1$. — 123) $\cos nx + \cos(n-2)x = \cos x$. — 124) $\operatorname{cosec}^2 {}^{x}/_{2} - \sec^2 {}^{x}/_{2} = 2\sqrt{3}\operatorname{cosec}^2 x$. — 125) $\cot x \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x \cot 2x = 2$. — 126) $\operatorname{tg} 3x = \sin 6x$. — 127) $\sin x = \operatorname{tg} x$. — 128) $\cos x = \operatorname{tg} x$. — 129) $\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$. — 130) $\frac{1}{2}\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$. — 131) $\cos^2 x - \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = {}^{5}/_{6}$. — 132) $\sin\alpha + \sin(x-\alpha) + \sin(2x+\alpha) = \sin(x+\alpha) + \sin(2x-\alpha)$. — 133) $\operatorname{tg} x(1+\cos 2\alpha) = \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2x$. — 134) $\sin x - \cos x = 4\cos^2 x \sin x + 4\sin^3 x$. — 135) $\sin x + \sin 3x = a$. — 136) $\cos x + \cos 3x = a$. — 137) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = a$.

138) $\sin x : \sin y = a;\ \cos x : \cos y = b$. — 139) $\sin x : \sin y = a;\ \operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = b$. — 140) $\sin x + \sin y = a;\ \cos x + \cos y = b$. — 141) $\sin(x-y) = \cos(x+y) = \frac{1}{2}$. — 142) $\operatorname{tg}(x+y) = a;\ \operatorname{tg}(x-y) = b$. — 143) $\sin x = a \cdot \sin y;\ 2\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} {}^{y}/_{2}$. — 144) $\operatorname{tg} {}^{x}/_{2} \operatorname{tg} {}^{y}/_{2} + \operatorname{tg} {}^{y}/_{2} \operatorname{tg} {}^{z}/_{2} + \operatorname{tg} {}^{z}/_{2} \operatorname{tg} {}^{x}/_{2} = \operatorname{tg}^2 x;\ \operatorname{tg}(x+y) = -\operatorname{tg} z;\ \sin^2 x + \sin^2 y = \cos^2 y;\ (x, y, z < R)$.

2. Winkel im Dreieck.*)

a) Rechtwinkliges Dreieck ($\alpha + \beta = R$).

145) $\operatorname{tg}\alpha = (\sin\alpha + \cos\beta) : (\cos\alpha + \sin\beta)$. — 146) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\beta + \cos\beta$. — 147) $\cos(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha$. — Ein

*) Bezeichnungen im Dreieck: abc Seiten, $\alpha\beta\gamma$ Winkel, $h_1 h_2 h_3$ Höhen, $t_1 t_2 t_3$ Mittellinien, $m_1 m_2 m_3$ Winkelhalbirende, r Radius des Um-

Dreieck mit den Winkeln α, β, γ ist rechtwinklig, wenn 148) $\sin\gamma = (\sin\alpha + \sin\beta) : (\cos\alpha + \cos\beta)$, 149) $\cot\gamma/_2 - \cot\beta/_2 = \cot\beta/_2 - \cot\alpha/_2 = 1$ (wie verhalten sich die Seiten dieses Dreiecks zu einander?), 150) $\sin\alpha - \cos\beta = \cos\gamma$, 151) $\sin\alpha : \cos\beta = \sin\gamma + \cos\gamma\cot\alpha$, 152) $2\sin\alpha\sin\beta = \sin 2\alpha\sin\gamma - \cos\gamma$.

b) Schiefwinkliges Dreieck ($\alpha + \beta + \gamma = 2R$).

153) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\alpha/_2\cos\beta/_2\cos\gamma/_2$. — 154) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\alpha/_2\sin\beta/_2\sin\gamma/_2$. — 155) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. — 156) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. — 157) $tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta\,.\,tg\,\gamma$ (Beispiel: $tg\,\alpha = 1$, $tg\,\beta = 2$, $tg\,\gamma = 3$). — 158) $\cot\alpha/_2 + \cot\beta/_2 + \cot\gamma/_2 = \cot\alpha'_2\cot\beta/_2\cot\gamma/_2$. — 159) $\cos^2\alpha/_2 + \cos^2\beta/_2 + \cos^2\gamma/_2 = 2 + 2\sin\alpha/_2\sin\beta/_2\sin\gamma/_2$. — 160) $\sin^2\alpha/_2 + \sin^2\beta/_2 + \sin^2\gamma/_2 = 1 - 2\sin\alpha/_2\sin\beta/_2\sin\gamma/_2$. — 161) $tg\,\alpha/_2\,tg\,\beta/_2 + tg\,\beta/_2\,tg\,\gamma/_2 + tg\,\gamma/_2\,tg\,\alpha'_2 = 1$. — 162) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. — 163) $\sin\alpha : \sin\beta = (\cot\beta/_2 + \cot\gamma/_2) : (\cot\alpha'_2 + \cot\gamma/_2)$. — 164) $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma - cosec\,\alpha\,cosec\,\beta\,cosec\,\gamma$. — 165) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\alpha/_2\sin\beta/_2\cos\gamma/_2$. — 166) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$. — 167) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

3. Formeln zwischen den Stücken des Dreiecks.

a) Rechtwinkliges Dreieck.

168) $2\cot\beta : \sin 2\alpha = c^2 : b^2$. — 169) $tg\,2\alpha - sec\,2\beta = (b + a) : (b - a)$. — 170) $a : (c - b) = (1 + \cos\alpha) : \sin\alpha$. — 171) $(a + b) : c = \cos 2\alpha : (\cos\alpha - \sin\alpha)$. — 172) $(a + b + c)^2 : c^2 = \sin 2\alpha + 2\sin\alpha + 4\cos^2\alpha/_2$. — 173) $\sin 2\alpha = 2ab : c^2$. — 174) $a^2 : bc = (1 - \cos^2\alpha) : \cos\alpha$.

b) Schiefwinkliges Dreieck.

175) $(a + b) : c = \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin\gamma/_2$. — 176) $(a - b) : c = \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos\gamma/_2$. — 177) $(b + c)^2 = a^2 + 4f^2\cot\alpha/_2$. — 178) $(b - c)^2 = a^2 - 4f^2\,tg\,\alpha/_2$. — 179) $pr\varrho = abc$. — 180) $\varrho = a\,.\sin\beta/_2\sin\gamma/_2 : \cos\alpha/_2$. — 181) $h_1 = a\sin\beta\sin\gamma : \sin\alpha$. — 182) $\varrho = a : (\cot\beta/_2 + \cot\gamma/_2)$. — 183) $\varrho = 4r\,.\sin\alpha/_2\sin\beta/_2\sin\gamma/_2$. —

---

kreises, ϱ Radius des Inkreises, $\varrho_1\varrho_2\varrho_3$ Radien der Ankreise, $2p = a + b + c$, $2p_1 = -a + b + c$, $2p_2 = a - b + c$, $2p_3 = a + b - c$, f^2 Fläche. Im rechtwinkligen D. ist $\gamma = R$, im gleichschenkligen $b = c$.

184) $\varrho_1 = a : (tg\,\beta/_2 + tg\,\gamma/_2)$. — 185) $\varrho_2 + \varrho_3 = a\,cot\,\alpha/_2$. — 186) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 4r + \varrho$. — 187) $h_1 = 2r\,sin\,\beta\,sin\,\gamma$. — 188) $\varrho_1 = 4r\,sin\,\alpha/_2\,cos\,\beta/_2\,cos\,\gamma/_2$. — 189) $\varrho + \varrho_1 = 4r\,sin\,\alpha/_2\,cos\,\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. — 190) $\varrho_1 + \varrho_2 = 4r\,cos^2\,\gamma/_2$. — 191) $\varrho_1 - \varrho = 4r\,sin^2\,\alpha/_2$. — 192) $\varrho_1 - \varrho_2 = 4r\,cos\,\gamma/_2\,sin\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. — 193) $(\varrho_1 - \varrho) : (\varrho_2 + \varrho_3) = tg^2\,\alpha/_2$. — 194) $(\varrho + \varrho_1) : (\varrho_2 - \varrho_3) = tg\,\alpha/_2\,cot\,\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. — 195) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - 3\varrho = 4r(sin^2\,\alpha/_2 + sin^2\,\beta/_2 + sin^2\,\gamma/_2)$. — 196) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 2r(cos^2\,\alpha/_2 + cos^2\,\beta/_2 + cos^2\,\gamma/_2)$. — 197) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + 3\varrho = 4r\,(cos\,\alpha + cos\,\beta + cos\,\gamma)$. — 198) $r + \varrho = r\,(cos\,\alpha + cos\,\beta + cos\,\gamma)$. — 199) $\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - 3r = r(cos\,\alpha + cos\,\beta + cos\,\gamma)$. — 200) $f^2 = 4r\varrho\,cos\,\alpha/_2\,cos\,\beta/_2\,cos\,\gamma/_2$. — 201) $4\,pp_3 = cot\,\alpha/_2\,cot\,\beta/_2$. — 202) $h_1 h_2 h_3 c = a^2 b^2\,sin^3\,\gamma$. — 203) $bc : a^2 = (cos\,\beta\,.\,cos\,\gamma + cos\,\alpha) : sin^2\,\alpha$. — 204) $(a^2 - b^2) : c = a\,cos\,\beta - b\,cos\,\alpha$. — 205) $a^2 + b^2 + c^2 = 2\,(bc\,cos\,\alpha + ca\,cos\,\beta + ab\,cos\,\gamma)$. — 206) $p_1 = p\,tg\,\beta/_2\,tg\,\gamma/_2$. — 207) $\varrho = p\,tg\,\alpha/_2\,tg\,\beta/_2\,tg\,\gamma/_2$.

4. Berechnung von Dreiecken.

a) Rechtwinklige Dreiecke.

Gegeben: **208)** α, $b + c$. — 209) α, $c - b$. — 210) α, $a + b$. — 211) α $a - b$. — 212) α, p_3. — 213) α, p_1. — 214) c, $a + b$. — 215) c, $a - b$. — 216) $a : b$, h_3. — 217) $a : b$, h_1. — 218) $a : b$, f^2. — 219) a, $\alpha - \beta$. — 220) α, p. — 221) t_1, t_2. — 222) r, α. — 223) ϱ, a. — 224) t_1, r. — 225) ϱ_1, a. — 226) ϱ_1, ϱ_2. — 227) t_1, c. — 228) ϱ, ϱ_1.

b) Gleichschenklige Dreiecke.

Gegeben: **229)** h_1, h_2. — 230) α, $h_1 + h_2$. — 231) α, $h_1 - h_2$. — 232) $b + h_1$, α. — 233) α, h_2. — 234) p, h_1. — 235) $a : b$, h_1.

c) Schiefwinklige Dreiecke.*)

Gegeben: **236)** $b + c$, $b - c$, α. — 237) $b + c$, $b - c$, a. — 238) p, $a - b$, $b - c$. — 239) $a + b$, $b + c$, $a - b$. — 240) a, $\alpha - \beta$, γ. — 241) b, $\alpha - \beta$, γ. — 242) $a + b$, $a : b$, γ. — 243) α, $b + c$, $b^2 + c^2$.

---

*) Andeutungen zur Lösung: 236—243: Durch algebraische Operationen auf eine der vier Hauptaufgaben zurückzuführen — 244—272: Mittelst rechtwinkliger Dreiecke zu lösen. — 273—285: Satz 79. — 286—289: Satz 80. — 290—311: Satz 81—84. — 312—321: Zum Theil durch Satz 78. — 322—346: 95, erste Formel. — 347—362: Formeln 90—93. — 363—379: 95, zweite Formel; 78. — 380—390: Formel 96.

244) h_1, b, c. — 245) h_1, b, β. — 246) h_1, α, β. — 247) h_1, a, b. — 248) h_1, a, β. — 249) h_1, b, α. — 250) f^2, a, b. — 251) h_1, h_2, a. — 252) h_1, h_2, γ. — 253) $b+c$, h_1, β. — 254) $b+c$, h_2, α. — 255) $b-c$, h_1, β. — 256) $b-c$, h_1, γ. — 257) $b-c$, h_2, α. — 258) $b+c$, h_2, f^2. — 259) $b-c$, h_2, f^2. — 260) h_1, t_1, a. — 261) h_1, t_1, b. — 262) h_1, t_1, β. — 263) h_1, m_1, α. — 264) h_1, m_1, c. — 265) a, β, ϱ. — 266) a, h_1, $b:c$. — 267) h, $b:c$, α. — 268) f^2, α, $h_2:h_3$. — 269) a, α, h_2+h_3. — 270) h_1, h_2, c. — 271) h_1, h_2, α. — 272) $a+b$, h_1+h_2, c.

273) a, $b+c$, α. — 274) a, $b-c$, α. — 275) r, $b+c$, $\beta-\gamma$. — 276) r, a, b. — 277) r, a, β. — 278) r, α, β. — 279) h_1, r, b. — 280) $b+c$, r, β. — 281) $b-c$, r, β. — 282) $b-c$, r, γ. — 283) $b+c$, r, α. — 284) $b+c$, r, a. — 285) $b-c$, r, a.

286) $b+c$, β, γ. — 287) a, $b:c$, α. — 288) $b+c$, α, h_3-h_2. — 289) $b-c$, α, h_3+h_2.

290) a, $b+c$, β. — 291) a, $b-c$, γ. — 292) a, α, f^2. — 293) a, $b+c$, f^2. — 294) p, α, f^2. — 295) p, α, β. — 296) a, α, ϱ. — 297) a, $b-c$, ϱ. — 298) a, $b+c$, h_1. — 299) a, $b-c$, h_1. — 300) ϱ, α, β. — 301) ϱ, $b+c$, a. — 302) ϱ, $b+c$, α. — 303) ϱ, h_1, α. — 304) a, ϱ, f^2. — 305) ϱ, $b-c$, β. — 306) p, ϱ, α. — 307) r, ϱ, a. — 308) r, ϱ, α. — 309) h_1, ϱ, f^2. — 310) h_1, p, f^2. — 311) p, r, α.

312) p_3, α, β. — 313) a, b, $\alpha-\beta$. — 314) $a:b$, c, α. — 315) $a:b$, c, γ. — 316) $a:b$, c, r. — 317) $b+c$, $a+c$, α. — 318) $b+c$, $a+c$, γ. — 319) p, $a-b$, α. — 320) p, $a-b$, γ. — 321) p, $a-b$, β.

322) f^2, r, a. — 323) f^2, r, α. — 324) f^2, $b+c$, α. — 325) f^2, $b-c$, α.

326) h_1, p, α. — 327) h_1, $b+c$, α. — 328) h_1, $a+b$, c. — 329) h_1, $a+b$, β. — 330) h_1, $b-c$, α. — 331) h_1, $a-b$, c. — 332) h_1, p, β. — 333) h_1, p, α. — 334) h_1, r, α. — 335) h_1, ϱ, α. — 336) h_1, ϱ, b. — 337) h_1, ϱ, β. — 338) $a+b$, h_1, h_2. — 339) $a-b$, h_1, h_2. — 340) h_1, h_2, h_3. — 341) h_1, $b+c$, r. — 342) h_1, $b-c$, r. — 343) h_1, a, α. — 344) h_2, $b+c$, α. — 345) h_1, $b-c$, $\beta-\gamma$. — 346) h_1, $b+c$, $\beta-\gamma$.

347) ϱ, a, b (Gl. 3. Grades). — 348) ϱ_1, a, β. — 349) ϱ_1, b, α. — 350) ϱ_1, b, γ. — 351) ϱ_1, α, β. — 352) ϱ_1, a, α. — 353) ϱ_1, b, β. — 354) ϱ, ϱ_1, a. — 355) ϱ, ϱ_1, b. — 356) ϱ_1, ϱ_2, a. — 357) ϱ_1, ϱ_2, c. — 358) ϱ_1, a, b. — 359) ϱ_1, b, c. — 360) ϱ, ϱ_1, ϱ_2. — 361) ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3. — 362) p, p_1, ϱ_2.

363) t_1, α, r. — 364) t_1, a, α. — 365) t_1, α, β. — 366) b, c, $\angle(t_1 a)$. — 367) t_1, α, $\angle(t_1 a)$. — 368) t_1, a, b. — 369) t_1, a, β. —

370) $t_1, b, c.$ — 371) $t_1, a:b, c.$ — 372) $t_1, t_2, a.$ — 373) $t_1, t_2, c.$ — 374) $t_1, a, b+c.$ — 375) $t_1, a, b-c.$ — 376) $t_1, t_2, \alpha.$ — 377) $t_1, t_2, \gamma.$ — 378) $t_1, t_2, t_3.$ — 379) $t_1, h_1, \alpha.$

380) $m_1, b, c.$ — 381) $m_1, b, \alpha.$ — $m_1, b, \gamma.$ — 382) $m_1, \alpha, \beta.$ — 383) $m_1, a, b.$ — 384) $m_1, a, \alpha.$ — 385) $a:m_1, \varrho, \varrho_1.$ — 386) $a:m_1, \varrho, h_1.$ — 387) $m_1, r, a:(b+c).$ — 388) $m_1, a, h_1.$ — 389) $m_1, b+c, \alpha.$ — 390) $m_1, b+c, a.$

391) α, a_1, a_2 (Projectionen von b und c auf a). — 392) α, n_2, n_3 (Halbirungslinien von β und γ bis zu ihrem Schnittpunkte). — 393) a, r_2, r_3 (Mittelsenkrechten auf b und c bis zu ihrem Schnittpunkte). — 394) r_1, r_2, r_3 (Gl. 3. Grades). — 395) $b-c, \beta, r_3.$

5. Vermischte Sätze und Aufgaben.

396) Sind d_1 und d_2 die Diagonalen, f^2 die Fläche eines Vierecks, so ist $f^2 = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin(d_1 d_2)$. — 397) Ist im rechtwinkligen Dreieck ABC die Strecke BB_1 so gezogen, dass $ABB_1 = {}^R/_3$ ist, so ist $BA \,.\, BB_1 = 2BC \,.\, AB_1$. — 399) Ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks in drei gleiche Theile getheilt, jeder Theilpunkt mit der Spitze verbunden, und x der Winkel zwischen einem Schenkel und der benachbarten Verbindungslinie, so ist $\cot x = (2+\cos\alpha) : \sin\alpha$. — 399) Sind $abcd$ der Reihe nach die Seiten eines Sehnenvierecks, so ist $\cos(ad) = (a^2+d^2-b^2-c^2) : (2ad+2bc)$ (Cosinussatz für das Sehnenviereck). — Ist ferner $a+b+c+d = 2p$, $p-a = p_1$, $p-b = p_2$, $p-c = p_3$, $p-d = p_4$, so ist 400) $\cos^2 \frac{1}{2}(ad) = p_2 p_3 : (ad+bc)$, 401) $\sin^2 \frac{1}{2}(ad) = \frac{p_1 p_4}{ad+bc}$, 402) $\sin(ad) = 2\sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4} : (ad+bc)$, 403) $f^2 = \sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}$. — 404) Ist e diejenige Diagonale, welche mit a und b ein Dreieck bildet, so ist $e^2 = (ad+bc) \,.\, (ac+bd) : (ab+cd)$. — 405) Ist endlich r der Radius des Umkreises, so ist $16r^2 = (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) : p_1 p_2 p_3 p_4$.

406) In welchem Verhältniss stehen die Umfänge des regelmässigen Achtecks und Fünfzehnecks bei gleicher Fläche? — 407) Dgl. die Flächen derselben Polygone bei gleichem Umfang? — 408) In welchem Verhältniss stehen die Umfänge des regelmässigen Sechszehnecks und Fünfecks, wenn der Umkreis des ersteren die doppelte Fläche hat vom Inkreise des letzteren? — 409) In ein regelmässiges Zehneck und um ein regelmässiges Siebzehneck sind Kreise beschrieben. Wie verhalten

sich deren Umfänge, wenn beide Polygone flächengleich sind? — 410) Wie gross ist die Seite eines regelmässigen Zwanzigecks, dessen Fläche diejenige eines regelmässigen Zwölfecks von gleichem Umfang um eine gegebene Grösse übertrifft? — 411) Die Seite des regelmässigen Fünfzehnecks aus der Breite des Ringes zu berechnen, der von seinem Umkreise und Inkreise gebildet wird. — 412) Den wievielten Theil des Radius des Umkreises beträgt die Differenz zwischen der Seite des regelmässigen Siebenecks und der halben Seite des regelmässigen Dreiecks? — 413) Aus der Fläche eines Segments und dem zugehörigen Centriwinkel Sehne und Bogen des Segmentes zu berechnen. — 414) Seiten und Fläche eines Sehnenvierecks zu berechnen, wenn der Radius des Kreises und die Verhältnisse der zu den Seiten gehörigen Bogen gegeben sind. — 415) Aus den Centriwinkeln der gemeinsamen Sehne zweier sich schneidender Kreislinien und dem Radius der einen den Radius der andern zu berechnen. — 416) Seite und Fläche eines einem gegebenen Kreise einbeschriebenen, 417) umbeschriebenen n-Ecks zu berechnen. — 418) Den zwischen zwei parallelen Sehnen liegenden Theil der Kreisfläche zu berechnen, wenn der Radius des Kreises, und die Abstände der Sehnen vom Mittelpunkte gegeben sind. — 419) Drei Kreise mit gegebenen Radien berühren sich von aussen. Man berechne die Winkel des Dreiecks ihrer Centrallinien.

Ein gleichschenkliges Trapez*) zu berechnen aus **420)** a, b, β. — 421) a, f^2, β.

Ein Trapez zu berechnen aus **422)** f^2, b, c, γ. — 423) a_1, b, c, $\beta + \gamma$. — 424) f^2, b, c, $\beta + \gamma$.

Vermessungsaufgaben. **425)** Die Höhe eines senkrechten Gegenstandes aus der Länge seines Schattens und der Sonnenhöhe zu berechnen. — 426) Den Radius eines Kreises aus dem Gesichtswinkel, unter welchem derselbe von einem in derselben Ebene ausserhalb liegenden Punkte erscheint, und aus dem Abstande dieses Punktes vom Mittelpunkte zu berechnen. — 427) Wie weit kann man von einem Punkte aus sehen, dessen Höhe über der Oberfläche der Erdkugel gegeben ist? — 428) Die Höhe XY eines senkrechten Gegenstandes aus der Entfernung zweier, mit seinem Fusspunkte Y in gerader Linie liegenden Punkte A, B der Ebene, und den Winkeln

---

*) Bezeichnungen im Trapez: aa_1 parallele, bc nicht parallele Seiten, $\angle(ab) = \gamma$, $\angle ac = \beta$, f^2 Fläche.

XAY und *XBY* zu berechnen.*) — 429) Die Entfernung eines Punktes *X* von einer gegebenen Strecke *AB* und von ihren Endpunkten aus der Länge dieser Strecke, und den Winkeln *XAB* und *XBA* zu berechnen. — 430) Dgl. die Entfernung zweier Punkte *X* und *Y* aus der Länge einer geg. Strecke *AB*, und den Winkeln *XAB*, *XBA*, *YAB*, *YBA*. — 431) Dgl. die Entfernung eines Punktes *A* von den Ecken eines geg. Dreiecks $\overline{XYZ}$ aus den Winkeln *XAY* und *YAZ* (Pothenot'sche Aufgabe).

Rationale Dreiecke.

Vorbemerkung. — Ein Dreieck heisst rational, wenn die Masszahlen seiner Seiten und die Funktionen seiner Winkel rational sind. Dann folgt aus 85, dass auch seine Fläche, aus 91, dass die Radien seiner Berührungskreise, aus 95, dass seine Höhen, aus 79, dass der Radius seines Umkreises rationale Masszahlen haben. — Da die Seiten eines Dreiecks sich durch die Grössen p, p_1, p_2, p_3 und alle Funktionen seiner Winkel durch $tg\,\alpha/2$, $tg\,\beta/2$, $tg\,\gamma/2$ rational ausdrücken lassen, letztere aber wieder (nach 81) durch ϱ und p_1, p_2, p_3, so kommt es schliesslich, um rationale Dreiecke zu erhalten, nur darauf an, ϱ und die drei Grössen p, oder vielmehr, da zwischen diesen noch die Gleichung 82 besteht, ϱ und zwei der Grössen p rational zu wählen.

Methoden zur Aufstellung rationaler Dreiecke. — a) Das rechtwinklige Dreieck. — Da die Winkelfunktionen des rechtwinkligen Dreiecks seinen Seitenverhältnissen gleich sind, so genügt es zur Rationalität des Dreiecks, wenn seine Seiten rational sind. Eine Methode zur Aufstellung solcher Dreiecke ist bereits in Th. II, S. 148, Fussnote, mitgetheilt. Danach hat man in den Ausdrücken

$$a = p^2 - q^2;\ b = 2pq;\ c = p^2 + q^2$$

für p und q zwei beliebige (aber keinen gemeinsamen Factor enthaltende) Zahlen zu setzen, von denen eine gerade, die andere ungerade sein muss. (Andernfalls würde man für a, b, c Werthe erhalten, die einen gemeinsamen Factor hätten, die

---

*) Die durch *X*, *Y*, *Z* bezeichneten Punkte in dieser und den folgenden Aufgaben kann man sich als unzugänglich, die durch *A*, *B*, *C* . . bezeichneten als zugänglich vorstellen.

man also einfacher durch Multiplication andrer Werthe von a, b, c mit diesem Factor erhalten würde.)

b) Das schiefwinklige Dreieck. — Ersetzt man in der Formel 82

$$\varrho^2 = \frac{p_1 p_2 p_3}{p}$$

p durch seinen Werth $p_1 + p_2 + p_3$ [Th. II, Nr. 99, Formel 3)] und bestimmt p_1, so folgt:

$$1) \qquad p_1 = \frac{\varrho^2 (p_2 + p_3)}{p_2 p_3 - \varrho^2}.$$

Setzt man hierin für ϱ, p_2, p_3 beliebige ganze Zahlen, so erhält man p_1 als Bruch, und wenn man ϱ, p_1, p_2, p_3 mit dem Nenner dieses Bruches multiplicirt, als ganze Zahl. Dann ist weiter [Th. II, Nr. 99, Formel 1)]:

$$2) \quad a = p_2 + p_3, \; b = p_3 + p_1; \; c = p_1 + p_2.$$

Ferner (81), (87)

$$3) \quad tg \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{p_1}; \; tg \frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{p_2}; \; tg \frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{p_3}.$$

$$4) \qquad p = p_1 + p_2 + p_3; \; f^2 = p\varrho.$$

Um durch a, b, c, f^2 (diese Stücke enthalten die folgenden Tafeln) alle andern oben genannten Stücke des Dreiecks zu bestimmen, dienen die Formeln:

$$5) \; \varrho = \frac{f^2}{p}; \; \varrho_1 = \frac{f^2}{p_1}; \; \varrho_2 = \frac{f^2}{p_2}; \; \varrho_3 = \frac{f^2}{p_3}. \quad (91)$$

$$6) \qquad h_1 = \frac{2f^2}{a}; \; h_2 = \frac{2f^2}{b}; \; h_3 = \frac{2f^2}{c}. \qquad (95)$$

$$7) \qquad r = \frac{abc}{4f^2} \qquad (88)$$

Die im Allgemeinen irrationalen Stücke t und m werden durch 95 und 96 bestimmt, nämlich:

$$8) \qquad t_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - \tfrac{1}{2} a^2)}.$$

$$9) \qquad m_1 = \frac{2\sqrt{p p_1 bc}}{b + c}.$$

Hieraus erhält man t_2, t_3, m_2, m_3 durch die bekannten Vertauschungen.

Anm. Mittelst der Formeln 5) bis 9) lassen sich aus den folgenden Tafeln leicht Zahlenwerthe bestimmen, welche für die Aufgaben des vorigen Abschnittes Beispiele zu liefern geeignet sind. — Das unter b) beschriebene Verfahren ist von H. Grassmann in Grunert's Archiv Bd. 49 (1868) mitgetheilt.

I. Tafel rechtwinkliger Dreiecke.

No.	a	b	c	α	β	F
1	4	3	5	53°. 7′. 48,4″	36°. 52′. 11,6″	6
2	12	5	13	67. 22. 48,5	22. 37. 11,5	30
3	8	15	17	28. 4. 20,9	61. 55. 39,1	60
4	24	7	25	73. 44. 23,3	16. 15. 36,7	84
5	20	21	29	43. 36. 10,1	46. 23. 49,9	210
6	40	9	41	77. 19. 10,6	12. 40. 49,4	180
7	12	35	37	18. 55. 28,7	71. 4. 31,3	210
8	60	11	61	79. 36. 40,0	10. 23. 20,0	330
9	28	45	53	31. 53. 26,8	58. 6. 33,2	630
10	56	33	65	59. 29. 23,2	30. 30. 36,8	924
11	84	13	85	81. 12. 9,3	8. 47. 50,7	546
12	16	63	65	14. 15. 0,1	75. 44. 59,9	504
13	48	55	73	41. 6. 43,5	48. 53. 16,5	1320
14	80	39	89	64. 0. 38,8	25. 59. 21,2	1560
15	112	15	113	82. 22. 18,7	7, 37. 41,3	840
16	36	77	85	25. 3. 27,4	64. 56. 32,6	1386
17	72	65	97	47. 55. 29,9	42. 4. 30,1	2340
18	144	17	145	83. 16. 1,5	6. 43. 58,5	1224
19	20	99	101	11. 25. 16,3	78. 34. 43,7	990
20	60	91	109	33. 23. 54,6	56. 36. 5,4	2730
21	140	51	149	69. 59. 2,5	20. 0. 57,5	3570
22	180	19	181	83. 58. 27,9	6. 1. 32,1	1710
23	44	117	125	20. 36. 34,9	69. 23. 25,1	2574
24	88	105	137	39. 57. 58,4	50. 2. 1,6	4620
25	132	85	157	57. 13. 15,3	32. 46. 44,7	5610
26	176	57	185	72. 3. 17,1	17. 56. 42,9	5016
27	220	21	221	84. 32. 50,5	5. 27. 9,5	2310
28	24	143	145	9. 31. 38,2	80. 28. 21,8	1716
29	120	119	169	45. 14. 23,0	44. 45. 37,0	7140
30	168	95	193	60. 30. 46,4	29. 29. 13,6	7980
31	264	23	265	85. 1. 15,3	4. 58. 44,7	3036
32	52	165	173	17. 29. 32,4	72. 30. 27,6	4290
33	104	153	185	34. 12. 19,6	55. 47. 40,4	7956
34	156	133	205	49. 33. 1,0	40. 26. 59,0	10374
35	208	105	233	63. 12. 54,0	26. 47. 6,0	10920
36	260	69	269	75. 8. 13,8	14. 51. 46,2	8970
37	312	25	313	85. 25. 7,6	4. 34. 52,4	3900
38	28	195	197	8. 10. 16,4	81. 49. 43,6	2730
39	84	187	205	24. 11. 22,3	65. 48. 37,7	7854
40	140	171	221	39. 18. 27,5	50. 41. 32,5	11970
41	252	115	227	65. 28. 13,6	24. 31. 46,4	14490
42	308	75	317	76. 18. 52,0	13. 41. 8,0	11550
43	364	27	365	85. 45. 28,1	4. 14. 31,9	4914
44	60	221	229	15. 11. 21,4	74. 48. 38,6	6630
45	120	209	241	29. 51. 46,0	60. 8. 14,0	12540
46	240	161	289	56. 8. 41,9	33. 51. 18,1	19320

No.	a	b	c	α	β	F
47	420	29	421	86°. 3′. 0,4″	3°.56′.59,6″	6090
48	32	255	257	7. 9. 9,6	82. 50. 50,4	4080
49	96	247	265	21. 14. 21,5	68. 45. 38,5	11856
50	160	231	281	34. 42. 29,0	55. 17. 31,0	18480
51	224	207	305	47. 15. 31,5	42. 44. 28,5	23184
52	288	175	337	58. 42. 55,8	31. 17. 4,2	25200
53	352	135	377	69. 1. 1,4	20. 58. 58,6	23760
54	416	87	425	78. 11. 15,8	11. 48. 44,2	18096
55	480	31	481	86. 18. 17,2	3. 41. 42,8	7440
56	68	285	293	13. 25. 10,8	76. 34. 49,2	9690
57	136	273	305	26. 28. 51,7	63. 31. 8,3	18564
58	204	253	325	38. 52. 48,3	51. 7. 11,7	25806
59	272	225	353	50. 24. 8,1	39. 35. 51,9	30600
60	340	189	389	60. 55. 51,9	29. 4. 8,1	32130
61	408	145	433	70. 26. 6,7	19. 33. 53,3	29580
62	476	93	485	78. 56. 41,7	11. 3. 18,3	22134
63	544	33	545	86. 31. 42,9	3. 28. 17,1	8976
64	36	323	325	6. 21. 34,8	83. 38. 25,2	5814
65	180	299	349	31. 2. 53,6	58. 57. 6,4	26910
66	252	275	373	42. 30. 3,6	47. 29. 56,4	34650
67	396	203	445	62. 51. 32,9	27. 8. 27,1	40194
68	468	155	493	71. 40. 31,1	18. 19. 28,9	36270
69	612	35	613	86. 43. 36,6	3. 16. 23,4	10710
70	76	357	365	12. 1. 4,9	77. 58. 55,1	13566
71	152	345	377	23. 46. 38,3	66. 13. 21,7	26220
72	228	325	397	35. 3. 4,1	54. 56. 55,9	37050
73	304	297	425	45. 40. 2,3	44. 19: 57,7	45144
74	380	261	461	55. 31. 1,5	34. 28. 58,5	49590
75	456	217	505	64. 33. 4,6	25. 26. 55,4	49476
76	532	165	557	72. 46. 7,3	17. 13. 52,7	43890
77	608	105	617	80. 12. 6,5	9. 57. 53,5	31920
78	684	37	685	86. 54. 13,3	3. 5. 46,7	12654
79	40	399	401	5. 43. 29,3	84. 16. 30,7	7980
80	120	391	409	17. 3. 41,5	72. 56. 18,5	23460
81	280	351	449	38. 34. 48,3	51. 25. 11,7	49140
82	360	319	481	48. 27. 19,7	41. 32. 40,3	57420
83	440	279	521	57. 37. 17,7	32. 22. 42,3	61380
84	520	231	569	66. 2. 51,9	23. 57. 8,1	60060
85	680	111	689	80. 43. 44,6	9. 16. 15,4	37740
86	760	39	761	87. 3 44,6	2. 56. 15,4	14820
87	84	437	445	10. 52. 50,4	79. 7. 9,6	18354
88	168	425	457	21. 34. 6,9	68. 25. 53,1	35700
89	336	377	505	41. 42. 32,1	48. 17. 27,9	63336
90	420	341	541	50. 55. 36,1	39. 4. 23,9	71610
91	672	185	697	74. 36. 28,4	15. 23. 31,6	62160
92	840	41	841	87. 12. 20,3	2. 47. 39,7	17220
93	44	483	485	5. 12. 18,4	84. 47. 41,6	10626
94	132	475	493	15. 31. 49,2	74. 28. 10,8	31350
95	220	459	509	25. 36. 30,7	64. 23. 29,3	50490

No.	a	b	c	α	β	F
96	308	435	533	$35^0.18'.\ 0{,}9''$	$54^0.41'.59{,}1''$	66990
97	396	403	565	44. 29. 53,0	45. 30. 7,0	79794
98	572	315	653	61. 9. 30,4	28. 50. 29,6	90090
99	660	259	709	68. 34. 25,5	21. 25. 34,5	85470
100	748	195	773	75. 23. 18,5	14. 36. 41,5	72930

II. Tafel schiefwinkliger Dreiecke.

No.	a	b	c	α	β	γ	F
1	14	15	13	$59^0.29'.23{,}1''$	$67^0.22'.48{,}5''$	$53^0.\ 7'.48{,}4''$	84
2	150	25	145	96. 43. 58,5	9. 31. 38,2	73. 44. 23,3	1800
3	120	29	101	124. 58. 33,6	11. 25. 16,3	43. 36. 10,1	1200
4	408	41	401	96. 57. 20,1	5. 43. 29,3	77. 19. 10,6	8160
5	40	13	37	93. 41. 42,8	18. 55. 28,7	67. 22. 48,5	240
6	44	15	37	107. 56. 42,9	18. 55. 28,7	53. 7. 48,4	264
7	102	61	109	66. 59. 25,4	33. 23. 54,6	79. 36. 40,0	3060
8	232	61	229	85. 11. 58,6	15. 11. 21,4	79. 36. 40,0	6960
9	312	109	229	131. 24. 44,0	15. 11. 21,4	33. 23. 54,6	9360
10	240	53	197	139. 56. 16,8	8. 10. 16,4	31. 53. 26,8	3360
11	200	85	205	74. 36. 28,4	24. 11. 22,3	81. 12. 9,3	8400
12	450	85	445	87. 55. 0,3	10. 52. 50,4	81. 12. 9,3	18900
13	624	205	445	144. 55. 47,3	10. 52. 50,4	24. 11. 22,3	26208
14	222	149	221	70. 42. 30,0	39. 18. 27,5	69. 59. 2,5	15540
15	400	85	325	148. 34. 57,8	6. 21. 34,8	25. 3. 27,4	7200
16	318	181	349	64. 58. 38,5	31. 2. 53,6	83. 58. 27,9	28620
17	630	73	577	134. 6. 57,7	4. 46. 18,8	41. 6. 43,5	15120
18	600	125	485	154. 11. 6,7	5. 12. 18,4	20. 36. 34,9	13200
19	328	169	241	104. 53. 51,0	29. 51. 46,0	45. 14. 23,0	19680
20	510	169	409	117. 41. 55,5	17. 3. 41,5	45. 14. 24,0	30600
21	600	241	409	133. 4. 32,5	17. 3. 41,5	29. 51. 46,0	36000
22	520	193	457	97. 55. 6,7	21. 34. 6,9	60. 30. 46,4	43680
23	560	157	493	107. 14. 55,5	15. 31. 49,2	57. 13. 15,3	36960
24	390	373	277	72. 1. 42,8	65. 28. 13,6	42. 30. 3,6	49140
25	480	509	221	69. 50. 38,8	84. 32. 50,5	25. 36. 30,7	52800
26	712	601	289	100. 19. 6,4	56. 8. 41,9	23. 32. 11,7	85440
27	510	533	317	68. 23. 7,1	76. 18. 52,0	35. 18. 0,9	78540
28	606	565	445	72. 38. 34,1	62. 51. 32,9	44. 29. 53,0	119988
29	904	625	505	105. 46. 14,4	41. 42. 32,1	32. 31. 13,5	151872
30	370	541	421	43. 1. 23,5	86. 3. 0,4	50. 55. 36,1	77700
31	120	17	113	110. 26. 39,6	7. 37. 41,3	61. 55. 39,1	900
32	240	221	29	128. 9. 0,6	46. 23. 49,9	5. 27. 9,5	2520
33	840	761	89	151. 4. 23,4	25. 59. 21,2	2. 56. 15,4	16380
34	1040	1013	53	119. 20. 41,0	58. 6. 33,2	2. 32. 45,8	23400
35	296	233	137	103. 10. 52,4	50. 2. 1,6	26. 47. 6.0	15540

No.	a	b	c	α	β	γ	F
36	816	233	617	143°. 25′. 0,5″	9°. 57′. 53,5″	26°. 47′. 6,0″	42840
37	696	137	617	120. 10. 4,9	9. 57. 53,5	50. 2. 1,6	36540
38	584	557	173	90. 15. 39,7	72. 30. 27,6	17. 13. 52,7	48180
39	776	773	197	83. 33. 34,9	81. 49. 43,6	14. 36. 41,5	75660
40	680	569	281	100. 45. 20,9	55. 17. 31,0	23. 57. 8,1	78540
41	872	785	305	96. 7. 48,0	63. 31. 8,3	20. 21. 3,7	119028
42	1160	821	629	105. 29. 41,2	43. 0. 10,3	31. 30. 8,5	248820
43	861	500	689	91. 22. 50,0	35. 29. 21,6	53. 7. 48,4	172200
44	1869	1700	881	86. 41. 20,5	65. 14. 18.6	28. 4. 20,9	747600
45	549	1300	1201	24. 57. 29,3	87. 39. 42,2	67. 22. 48,5	329400
46	354,9	370,0	120,1	73. 24. 49,1	87. 39. 42,2	18. 55. 28,7	21294
47	93	34	65	137. 40. 39,0	14. 15. 0,1	28. 4. 20,9	744
48	69	50	73	65. 8. 53,2	41. 6. 43,5	73. 44. 23,3	1656
49	51	58	41	59. 4. 39,3	77. 19. 10,6	43. 36. 10,1	1020
50	123	106	65	88. 37. 10,0	59. 29. 23,2	31. 53. 26,8	3444
51	52	15	41	130. 26. 59,0	12. 40. 49,4	36. 52. 11,6	234
52	44	39	17	95. 27. 9,4	61. 55. 39,1	22. 37. 11,5	330
53	92	75	29	117. 20. 33,4	46. 23. 49,9	16. 15. 36,7	966
54	236	183	65	139. 6. 3,2	30. 30. 36,8	10. 23. 20,0	3894
55	52	51	53	59. 57. 47,7	58. 6. 33,2	61. 55. 39,1	1170
56	332	255	89	145. 12. 48,1	25. 59. 21,2	8· 47. 50,7	6474
57	76	87	65	57. 51. 10,2	75. 44. 59,9	46. 23. 49,4	2394
58	188	195	101	70. 54. 39,5	78. 34. 43,7	30. 30. 36,8	9306
59	572	149	435	153. 15. 4,0	6. 43. 58,5	20. 0. 57,5	14586
60	284	125	267	84. 37. 13,7	25. 59. 21,2	69. 23. 25,1	16614
61	1924	137	1839	126. 41. 35,0	3. 16. 23,4	50. 2. 1,6	101010
62	716	185	543	156. 1. 45,0	6. 1. 32,1	17. 56. 42,9	20406
63	196	173	219	58. 36. 15,9	48. 53. 16,5	72. 30. 27,6	16170
64	244	233	111	82. 8. 22,7	71. 4. 31,3	26. 47. 6,0	12810
65	1052	269	795	160. 9. 29,1	4. 58. 44,7	14. 51. 46,2	36294
66	244	197	291	56. 5. 46,3	42. 4. 30,1	81. 49. 43,6	23790
67	668	221	555	111. 21. 44,6	17. 56. 42,9	50. 41. 32,5	57114
68	1244	317	939	161. 43. 59,6	4. 34. 52,4	13. 41. 8,0	46650
69	484	365	123	163. 4. 38,7	12. 40. 49,4	4. 14. 31,9	6534
70	428	257	471	64. 22. 24,9	32. 46. 44,7	82. 50. 50,4	54570
71	268	281	255	59. 45. 56,4	64. 56. 32,6	55. 17. 31,0	30954
72	1004	305	807	122. 23. 45,3	14. 51. 46,2	42. 44. 28,5	103914
73	436	377	159	100. 54. 38,2	58. 6. 33,2	20. 58. 58,6	29430
74	1676	425	1263	164. 14. 16,2	3. 56. 59,6	11. 48. 44,2	72906
75	572	293	579	73. 55. 57,2	29. 29. 13,6	76. 34, 49,2	81510
76	316	305	327	59. 52. 46,3	56. 36. 5,4	63. 31. 8,3	43134
77	1196	353	951	126. 43. 0,1	13. 41. 8,0	39. 35. 51,9	134550
78	388	389	195	75. 10. 52,0	75. 44. 59,9	29. 4. 8,1	36666
79	1916	485	1443	165. 14. 58,9	3. 41. 42,8	11. 3. 18,3	89094
80	436	365	507	57. 15. 27,9	44. 45. 37,0	77. 58. 55,1	77826
81	908	377	681	89. 14. 51,9	24. 31. 46,4	66. 13. 21,7	156630
82	364	425	303	57. 5. 18,6	78. 34. 43,7	44. 19. 57,7	54054
83	1628	461	1275	133. 42. 17,3	11. 48. 44,2	34. 28. 58,5	212454
84	676	557	219	113. 52. 50,8	48. 53. 16,5	17. 13. 52,7	55770

No.	a	b	c	α	β	γ	F
85	644	617	111	99°. 7′. 35,2″	71°. 4′. 31,3″	9°. 57′. 53,5″	33810
86	508	401	615	55. 16. 30,3	40. 26. 59,0	84. 16. 30,7	101346
87	412	449	375	59. 11. 23,2	69. 23. 25,1	51. 25. 11,7	72306
88	1868	521	1455	136. 33. 59,4	11. 3. 18,3	32. 22. 42,3	260586
89	628	569	255	91. 6. 19,3	64. 56. 32,6	23. 57. 8,1	72534
90	2732	689	2055	167. 37. 57,9	3. 5. 46,7	9. 16. 15,4	151626
91	764	485	867	61. 21. 0,3	33. 51. 18,1	84. 47. 41,6	184506
92	532	509	555	59. 48. 50,3	55. 47. 40,4	64. 23. 29,3	122094
93	1532	533	1299	105. 44. 7,6	19. 33. 53,3	54. 41. 59,1	333210
94	964	773	291	123. 18. 48,4	42. 4. 30,1	14. 36. 41,5	93990
95	3356	845	2523	168. 50. 8,9	2. 47. 39,7	8. 22. 11,4	206394
96	956	533	1011	68. 39. 17,9	31. 17. 4,2	80. 3. 37,9	250950
97	604	545	663	59. 2. 21,3	50. 41. 32,5	70. 16. 6,2	154926
98	1772	593	1479	110. 1. 59,9	18. 19. 28,9	51. 38. 31,2	411990
99	532	629	435	56 31. 27,9	80. 28. 21,8	43. 0. 10,3	114114
100	2684	725	2067	143. 23. 11,2	9. 16. 15,4	27. 20. 33,4	446886

Register.

	Nr.
Aenderung, stetige	2
Arcuscosinus	39
Arcussinus	39
Arcustangens	39
Cofunktion	15
Cosecans	13. 27
Cosinus	8. 21
Cosinussatz	48
Cotangens	13. 27
Funktion	1
„ algebraische	3
„ coordinirte	14
„ directe	15
„ indirecte	15
„ inverse	39
Funktion reciproke	14
„ transcendente	3
Funktionsgrösse	2
Modul des log. Systems	43
Primzahl	43
Quotient der Reihe	36
Reihe, convergente	36
„ divergente	36
Secans	13. 27
Sinus *)	13. 27
Sinussatz	47
Tangens	13. 27
Tangentialsatz	52
Winkel, congruente	21
Winkelfunktion	5

*) Uebersetzung eines arabischen Wortes, welches ausser dem mathematischen Begriffe noch die Bedeutung „Busen“ hat.

Berichtigungen.

Seite 64 Formel 13 muss es heissen $\sin R = 1$ statt $\sin R = 0$.

Tafeln

vierstelliger Logarithmen.

Anhang

zum

Lehrbuch der elementaren Mathematik, Th. III

von

Victor Schlegel,
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

Einleitung.*)

Die in den folgenden Tafeln stehenden Logarithmen beziehen sich auf die Grundzahl Zehn, gehören also dem gemeinen logarithmischen Systeme an.

Tafel I. Die Logarithmen der Decimalzahlen (S. 98—101).

Die Kennziffer des Logarithmus wird nach Th. I, 172, 175, 176 bestimmt; die Tafel enthält nur die Mantissen.

A. Gegeben die Zahl, gesucht der Logarithmus.

1) Liegt die Zahl zwischen 0 und 200, so suche man sie in der ersten, mit N. überschriebenen Spalte auf; die in der zweiten (mit L. 0 überschriebenen) Spalte rechts daneben stehende Zahl ist die zugehörige Mantisse. (Z. B.: $l 167 = 2{,}2227$.)

2) Liegt die Zahl zwischen 200 und 2000, so denke man sich ihre Einerstelle weg, und suche die übrig bleibende Zahl (wie in 1) in der ersten, mit N. überschriebenen Spalte auf; dann gehe man in derselben wagerechten Reihe nach rechts bis in diejenige Spalte, welche mit der Einerziffer der gegebenen Zahl überschrieben ist; die dort stehende Zahl ist die zu der gegebenen Zahl gehörige Mantisse. (Z. B.: $l 1837 = 3{,}2641$.)

3) Liegt die Zahl zwischen 2000 und 20000, so denke man sich ihre Einerstelle weg, und suche den Logarithmus der übrig bleibenden Zahl nach 2) auf. Dann bestimme man den Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse,**) suche in der mit P. P. überschriebenen Spalte die-

---

*) Ueber die Anwendung der Logarithmen zur Berechnung von Näherungswerthen im Allgemeinen, und über das gemeine logarithmische System insbesondere siehe Th. I, Nr. 167, 168, 169.

**) Sämmtliche Mantissen auf den 4 Seiten der Tafel folgen aufeinander wie die Wörter, Zeilen und Seiten eines Buches.

jenige kleine Tafel auf, welche mit diesem Unterschiede überschrieben ist, und suche in dieser Tafel links die Einerziffer der gegebenen Zahl auf. Den rechts danebenstehenden Decimalbruch addire man zu der vorher gefundenen Mantisse, und runde seine Decimalstelle (welche für die Mantisse die Bedeutung einer fünften Decimalstelle hat) nach Th. I, Regel 169 ab. (Z. B.: l 12489. Es ist

Mantisse von l 1248 gleich 0962.
Differenz zwischen 0962 und 0966 gleich 4.
In Tafel 4 steht neben 9 der Bruch 3 . 6. Also:

$$\begin{array}{r} 0962 \\ 3\,.\,6 \\ \hline 0965\,.\,6. \end{array}$$

Also, da die wegzulassende Decimalstelle $6 > 4$ ist, l 12489 $= 4{,}0966$.)

Anm. Bereits in diesem Intervall sind die Logarithmen zweier auf einander folgender Zahlen um so häufiger einander gleich, je grösser die gegebene Zahl ist. So ist z. B. $l\,12489 = l\,12490$. Dasselbe findet statt, wenn die gegebene Zahl grösser als 20000 ist. Man runde daher in diesem Falle ihre Einerstelle ab (z. B. 16 zu 20, 14 zu 10) und verfahre dann nach 3).

B. Gegeben der Logarithmus, gesucht die Zahl.

Die Mantissen von 0000 bis 3031 suche man auf S. 100 und 101, die von 3032 bis 9999 auf S. 98 unterhalb der starken wagerechten Linie, und auf S. 99.

1) Steht die Mantisse des gegebenen Logarithmus in der Tafel, so gehe man in derselben wagerechten Reihe nach links bis in die mit N. überschriebene Spalte. Die dort stehende Zahl ist der erste Theil der gesuchten Zahl (bis auf die Einerstelle). Als Einerstelle schreibt man dann die Ziffer, welche die Ueberschrift derjenigen Spalte bildet, in der man die Mantisse gefunden. Zuletzt wird das Komma bestimmt. (Z. B.: Gegeben 2,1995. Die Zahl ist 158,3.)

2) Steht die Mantisse des gegebenen Logarithmus nicht in der Tafel, so suche man die nächst kleinere Mantisse, und bestimme nach 1) die zugehörige Zahl. Dann bestimme man den Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse, suche in der mit P. P. überschriebenen Spalte diejenige kleine Tafel auf, welche mit die-

sem Unterschiede überschrieben ist, und suche in dieser Tafel rechts den Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse (oder denjenigen Decimalbruch, welcher diesem Unterschiede am nächsten kommt). Die links daneben stehende Zahl schreibt man als Einerziffer zu der bereits gefundenen Zahl hinzu. Zuletzt wird das Komma bestimmt. (Z. B.: Gegeben 1,4376. Die nächst kleinere Mantisse ist 4362, die zugehörige Zahl 273.

Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse:

$$4378 - 4362 = 16.$$ Also Tafel 16.

Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse:

$$4376 - 4362 = 14.$$

In Tafel 16 kommt diesem Unterschied am nächsten 14.4. Die links dabei stehende Zahl ist 9, also die gesuchte Zahl 2739, und nach Bestimmung des Kommas 27,39.)

Tafel II. Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen (S. 102—115).

Die Kennziffer für alle in einer Spalte befindlichen Mantissen steht am Fuss dieser Spalte. Steht über der ersten Ziffer der Mantisse ein wagerechter Strich, so ist die Kennziffer um Eins zu erniedrigen. — Sämmtliche Kennziffern sind um Zehn zu gross.

A. Gegeben der Winkel, gesucht der l_{tg} oder l_{sin}.

1) Ist der Winkel in Graden und Minuten gegeben, so gehe man in der mit der Zahl der Grade überschriebenen Spalte bis in diejenige wagerechte Reihe, welche links in der ersten Spalte mit der Anzahl der Minuten bezeichnet ist. Die dort stehende Zahl ist die gesuchte Mantisse. (Z. B.: l_{sin} $36^0\,44' = 9{,}7768$).

Anm. Die Tafel der l_{sin} enthält von 45^0 bis 90^0 nur die geraden Minuten. Ist nun die Minutenzahl des gegebenen Winkels ungerade, so addire man zu der Mantisse, welche zu der nächst niederen geraden Zahl gehört, 2, wenn die Differenz dieser und der folgenden Mantisse 3 beträgt, dagegen 1, wenn diese Differenz 2 oder 1 beträgt, und nichts, wenn sie 0 beträgt.

2) Ist der Winkel in Graden, Minuten und Zehntelminuten gegeben (oder auf solche abgerundet), so suche man

zuerst [nach 1)] die zu den Graden und Minuten gehörige Mantisse. Dann bestimme man den Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse, suche in der mit P. P. überschriebenen Spalte diejenige kleine Tafel auf, welche mit diesem Unterschiede überschrieben ist, und suche in dieser Tafel links die Zahl der Zehntelminuten auf. Den rechts daneben-stehenden Decimalbruch addire man zu der vorhergefundenen Mantisse, und runde seine Decimalstelle (welche für die Mantisse die Bedeutung einer fünften Decimalstelle hat) nach Th. I, Regel 169 ab. (Z. B.: $l\,tg\,11^0\,34{,}6'$. Es ist

Mantisse von $l\,tg\,11^0\,34'$ gleich 3110.
Differenz zwischen 3110 und 3117 gleich 7.
In Tafel 7 steht neben 6 der Bruch 4 . 2. Also:

$$\begin{array}{r} 3110 \\ 4\,.\,2 \\ \hline 3114\,.\,2. \end{array}$$

Also, da die wegzulassende Decimalstelle $2 < 5$ ist, $l\,tg\,11^0\,34{,}6' = 9{,}3114$.)

Anm. Zwischen 0^0 und 5^0 beträgt beim $l\,sin$, wie beim $l\,tg$ der Unterschied zweier auf einander folgender Mantissen meistens mehr als 15, während die kleinen Tafeln für höhere Differenzen als 15 fehlen. Man findet dann die zur Mantisse zu addirende Zahl, indem man die Differenz der beiden Mantissen durch 10 dividirt, und mit der Zahl der Zehntelminuten multiplicirt. (Z. B. $l\,tg\,3^0\,32{,}7'$. Mantisse zu $3^0\,32'$: 7906. Folgende Mantisse: 7927. Differenz: 21. Durch 10 dividirt: 2,1. Mit 7 multiplicirt: 14,7. Abgerundet: 15. Zu 7906 addirt: 7921. Also $l\,tg\,30^0\,32{,}7' = 8{,}7921$.)

B. Gegeben der $l\,tg$ oder $l\,sin$, gesucht der Winkel.

1) Steht der gegebene Logarithmus in der Tafel, so giebt die Ueberschrift der Spalte, in der man ihn gefunden, die Zahl der Grade, und die in derselben wagerechten Reihe links in der ersten Spalte stehende Zahl die Zahl der Minuten des gesuchten Winkels an. (Z. B.: Gegeben $l\,sin\,x = 9{,}4588$. Der Winkel ist $16^0\,43'$.)

Anm. Findet sich dieselbe Mantisse mehrmals hinter einander in der Tafel (was in der Tafel der $l\,sin$ von 69^0 an vorkommt), so nehme man das arithmetische Mittel der zur ersten und zur letzten dieser gleichen Mantissen gehörigen Minutenzahlen.

2) Steht der gegebene Logarithmus nicht in der Tafel, so suche man die nächst kleinere Mantisse und bestimme nach 1) den zugehörigen Winkel. Dann bestimme man den Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse, suche in der mit P. P. überschriebenen Spalte diejenige kleine Tafel auf, welche mit diesem Unterschiede überschrieben ist, und suche in dieser Tafel rechts den Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse (oder denjenigen Decimalbruch, welcher diesem Unterschiede am nächsten kommt). Die links daneben stehende Zahl ist die Anzahl der Zehntelminuten des gesuchten Winkels. (Z. B.: Gegeben $l\,tg\,x = 9{,}0376$. Die nächst kleinere Mantisse ist 0371, der zugehörige Winkel $6^0\,13'$.

Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse: $0383 - 0371 = 12$. Also Tafel 12.

Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse: $0376 - 0371 = 5$.

In Tafel 12 kommt diesem Unterschied am nächsten 4 . 8. Die links dabei stehende Zahl ist 4, also der gesuchte Winkel $6^0\,13{,}4'$.)

Anm. Fehlt die kleine Tafel, in der man die Anzahl der Zehntelminuten aufsuchen soll [s. Anm. zu A, 2)], so multiplicire man den Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse mit Zehn, und dividire ihn dann durch den Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse. Dieser Quotient, zu Ganzen abgerundet, giebt die gesuchten Zehntelminuten. (Z. B.: Gegeben $l\,tg\,x = 8{,}7921$. Die nächst kleinere Mantisse ist 7906, der zugehörige Winkel $3^0\,32'$.

Unterschied zwischen der gefundenen und der folgenden Mantisse

$$7927 - 7906 = 21.$$

Unterschied zwischen der gefundenen und der gegebenen Mantisse

$$7921 - 7906 = 15.$$

Also:

$$\begin{array}{r|r|l} 21 & 150 & 7{,}1 \\ & 147 & \\ \hline & 30 & \end{array}$$

Man hat also, wenn 7,1 zu 7 abgerundet wird, 7 Zehntelminuten, und der gesuchte Winkel ist $3^0\,32{,}7'$.)

Weitere Bemerkungen zu Tafel II. — In der Tafel der Tangenslogarithmen ist 2 die kleinste Differenz zweier auf einander folgender Mantissen. In der Tafel der Sinuslogarithmen verschwindet diese Differenz bei Winkeln über 45^0 oft

ganz. Ein Winkel kann daher aus seiner Sinusfunktion nicht immer mit gleicher Genauigkeit bestimmt werden wie aus seiner Tangensfunktion. — Ist nun in diesem Falle

$$\sin x = \frac{p}{q}$$

gegeben, so folgt hieraus

$$\operatorname{tg} x = \frac{p}{\sqrt{q^2 - p^2}} = \frac{p}{\sqrt{(q+p)(q-p)}};$$

also

$$\boldsymbol{l}\operatorname{tg} x = \boldsymbol{l} p - \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}(q+p) + \boldsymbol{l}(q-p)\right).$$

Berechnet man hieraus $\boldsymbol{l}\operatorname{tg} x$, so kann daraus der gesuchte Winkel mit genügender Genauigkeit gefunden werden.

Z. B.: Gegeben $\sin x = 0{,}9$; also $\boldsymbol{l}\sin x = 9{,}9542$. Hieraus findet sich nach der Sinustafel $x = 64^0\,8'$. Es ist nun

$$\operatorname{tg} x = \frac{9}{\sqrt{100 - 81}} = \frac{9}{\sqrt{19}};$$

$$\boldsymbol{l}\operatorname{tg} x = 0{,}9542 - 0{,}6394 = 10{,}3148;$$

also $x = 64^0\,9{,}3'$.

Tafel III. Complement- und Supplementwinkel (S. 116).

1) Bestimmung des Logarithmus einer Cofunktion. — Da

$$\cos x = \sin(90^0 - x) \text{ und } \operatorname{cot} x = \operatorname{tg}(90^0 - x)$$

ist, so hat man, wenn $\boldsymbol{l}\cos x$ oder $\boldsymbol{l}\operatorname{cot} x$ gesucht wird, nur $\boldsymbol{l}\sin(90^0 - x)$ oder $\boldsymbol{l}\operatorname{tg}(90^0 - x)$ zu bestimmen. Es kommt also darauf an, zu jedem Winkel x den Complementwinkel $90^0 - x$ zu bestimmen. Die hierzu erforderliche Rechnung wird durch Tafel III erspart, welche für jeden in Graden, Minuten und Zehntelminuten gegebenen Winkel den Complementwinkel liefert.

Man suche in dem linken Theile der Tafel in einer der mit W. unterschriebenen Spalten die Gradzahl des gegebenen Winkels. Die links daneben in der mit C. unterschriebenen Spalte stehende Zahl giebt die Grade des Complementwinkels. — Dann suche man im rechten Theile der Tafel die Minuten-

zahl des gegebenen Winkels, die daneben stehende Zahl (innerhalb derselben Doppellinien) giebt die Minuten des Complementwinkels.

2) Bestimmung des Logarithmus der Funktion eines stumpfen Winkels. — Da jede Funktion eines Winkels (abgesehen vom Vorzeichen) gleich derselben Funktion seines Supplementwinkels ist, so kommt es, um den Logarithmus der Funktion eines stumpfen Winkels zu finden, nur darauf an, zu jedem Winkel x den Supplementwinkel $180^0 - x$ zu bestimmen. Diesen Winkel liefert ebenfalls Tafel III, und zwar durch das in 1) beschriebene Verfahren. Nur hat man als Gradzahl des Supplementwinkels die rechts neben der gegebenen Zahl in der mit S unterschriebenen Spalte stehende Zahl zu nehmen.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.	
											22	21
0	—∞	0000	3010	4771	6021	6990	7782	8451	9031	9542		
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788	1	2.2 2.1
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624	2	4.4 4.2
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911	3	6.6 6.3
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902	4	8.8 8.4
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709	5	11.0 10.5
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388	6	13.2 12.6
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976	7	15.4 14.7
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494	8	17.6 16.8
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956	9	19.8 18.9
											20	19
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374		
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	1	2.0 1.9
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	2	4.0 3.8
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6.0 5.7
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	4	8.0 7.6
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	5	10.0 9.5
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	6	12.0 11.4
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	7	14.0 13.3
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	8	16.0 15.2
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	9	18.0 17.1
											18	17
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201		
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	1	1.8 1.7
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	3.6 3.4
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	3	5.4 5.1
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	4	7.2 6.8
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	5	9.0 8.5
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	6	10.8 10.2
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	7	12.6 11.9
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	8	14.4 13.6
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	9	16.2 15.3
											16	15
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900		
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	1.6 1.5
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	2	3.2 3.0
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	3	4.8 4.5
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	4	6.4 6.0
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	5	8.0 7.5
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	6	9.6 9.0
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	7	11.2 10.5
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5900	8	12.8 12.0
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	9	14.4 13.5
											14	13
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117		
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	1.4 1.3
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	2	2.8 2.6
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	3	4.2 3.9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	4	5.6 5.2
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	5	7.0 6.5
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	6	8.4 7.8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	7	9.8 9.1
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	8	11.2 10.4
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9	12.6 11.7
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067		
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7986
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
N.	**L. 0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

P. P.		
	12	11
1	1.2	1.1
2	2.4	2.2
3	3.6	3.3
4	4.8	4.4
5	6.0	5.5
6	7.2	6.6
7	8.4	7.7
8	9.6	8.8
9	10.8	9.9
	9	8
1	0.9	0.8
2	1.8	1.6
3	2.7	2.4
4	3.6	3.2
5	4.5	4.0
6	5.4	4.8
7	6.3	5.6
8	7.2	6.4
9	8.1	7.2
	7	6
1	0.7	0.6
2	1.4	1.2
3	2.1	1.8
4	2.8	2.4
5	3.5	3.0
6	4.2	3.6
7	4.9	4.2
8	5.6	4.8
9	6.3	5.4
	5	4
1	0.5	0.4
2	1.0	0.8
3	1.5	1.2
4	2.0	1.6
5	2.5	2.0
6	3.0	2.4
7	3.5	2.8
8	4.0	3.2
9	4.5	3.6

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.	
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039		5
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082	1	0.5
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	2	1.0
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166	3	1.5
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	4	2.0
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249	5	2.5
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290	6	3.0
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	7	3.5
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370	8	4.0
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	9	4.5
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449		4
111	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488	1	0.4
112	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527	2	0.8
113	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565	3	1.2
114	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603	4	1.6
115	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641	5	2.0
116	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678	6	2.4
117	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715	7	2.8
118	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752	8	3.2
119	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788	9	3.6
120	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824		3
121	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860	1	0.3
122	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896	2	0.6
123	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931	3	0.9
124	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966	4	1.2
125	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000	5	1.5
126	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035	6	1.8
127	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069	7	2.1
128	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1093	1096	1099	1103	8	2.4
129	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136	9	2.7
130	1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169		2
131	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202	1	0.2
132	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235	2	0.4
133	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268	3	0.6
134	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300	4	0.8
135	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332	5	1.0
136	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1355	1358	1361	1364	6	1.2
137	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396	7	1.4
138	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427	8	1.6
139	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458	9	1.8
140	1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489		
141	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520		
142	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550		
143	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581		
144	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611		
145	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641		
146	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670		
147	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700		
148	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729		
149	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758		
150	1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787		
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787
151	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816
152	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844
153	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872
154	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901
155	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928
156	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956
157	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984
158	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011
159	2014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038
160	2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066
161	2068	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092
162	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119
163	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146
164	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172
165	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198
166	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225
167	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251
168	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276
169	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302
170	2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327
171	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353
172	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378
173	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403
174	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428
175	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453
176	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477
177	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502
178	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526
179	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550
180	2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574
181	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598
182	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622
183	2625	2627	2629	2632	2634	2636	2639	2641	2643	2646
184	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669
185	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693
186	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716
187	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739
188	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762
189	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785
190	2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808
191	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831
192	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853
193	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876
194	2878	2880	2883	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898
195	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920
196	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942
197	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964
198	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986
199	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3006	3008
200	3010	3012	3015	3017	3019	3021	3023	3025	3028	3030
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.	
	3
1	0.3
2	0.6
3	0.9
4	1.2
5	1.5
6	1.8
7	2.1
8	2.4
9	2.7
	2
1	0.2
2	0.4
3	0.6
4	0.8
5	1.0
6	1.2
7	1.4
8	1.6
9	1.8

Log. Tangens 0^0—21^0.

′	0^0	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0	6^0	7^0	8^0	9^0	10^0	11^0	12^0	13^0	14^0	15^0	16^0	17^0	18^0	19^0	20^0	21^0
0	−∞	2419	5431	7194	8446	9420	0216	0891	1478	1997	2463	2887	3275	3634	3968	4281	4575	4853	5118	5370	5611	5842
1	$\bar{4}$637	2491	5467	7218	8465	9434	0228	0902	1487	2005	2471	2893	3281	3639	3973	4286	4580	4858	5122	5374	5615	5846
2	$\bar{7}$648	2562	5503	7242	8483	9449	0240	0912	1496	2013	2478	2900	3287	3645	3978	4291	4584	4862	5126	5378	5619	5849
3	$\bar{9}$408	2631	5538	7266	8501	9463	0253	0923	1505	2022	2485	2907	3293	3651	3984	4296	4589	4867	5131	5382	5622	5853
4	0658	2700	5573	7290	8518	9477	0265	0933	1515	2030	2493	2913	3300	3657	3989	4301	4594	4871	5135	5386	5626	5857
5	1627	2767	5608	7313	8536	9492	0277	0943	1524	2038	2500	2920	3306	3662	3995	4306	4599	4876	5139	5390	5630	5861
6	2419	2833	5643	7337	8554	9506	0289	0954	1533	2046	2507	2927	3312	3668	4000	4311	4603	4880	5143	5394	5634	5864
7	3088	2899	5677	7360	8572	9520	0300	0964	1542	2054	2515	2934	3318	3674	4005	4316	4608	4885	5148	5398	5638	5868
8	3668	2963	5711	7383	8589	9534	0312	0974	1551	2062	2522	2940	3324	3680	4011	4321	4613	4889	5152	5402	5642	5872
9	4180	3026	5745	7406	8607	9549	0324	0984	1560	2070	2529	2947	3330	3685	4016	4326	4618	4894	5156	5407	5646	5876
10	4637	3089	5779	7429	8624	9563	0336	0995	1569	2078	2536	2953	3336	3691	4021	4331	4622	4898	5161	5411	5650	5879
11	5051	3150	5812	7452	8642	9577	0348	1005	1578	2086	2544	2960	3343	3697	4027	4336	4627	4903	5165	5415	5654	5883
12	5429	3211	5845	7475	8659	9591	0360	1015	1587	2094	2551	2967	3349	3702	4032	4341	4632	4907	5169	5419	5658	5887
13	5777	3271	5878	7497	8676	9605	0371	1025	1596	2102	2558	2973	3355	3708	4037	4346	4637	4912	5173	5423	5662	5891
14	6099	3330	5911	7520	8694	9619	0383	1035	1605	2110	2565	2980	3361	3714	4042	4351	4641	4916	5178	5427	5665	5894
15	6398	3389	5943	7542	8711	9633	0395	1045	1613	2118	2573	2987	3367	3719	4048	4356	4646	4921	5182	5431	5669	5898
16	6678	3446	5975	7565	8728	9646	0407	1056	1622	2126	2580	2993	3373	3725	4053	4361	4651	4925	5186	5435	5673	5902
17	6942	3503	6007	7587	8745	9660	0418	1066	1631	2134	2587	3000	3379	3731	4058	4366	4655	4930	5190	5439	5677	5906
18	7190	3559	6038	7609	8762	9674	0430	1076	1640	2142	2594	3006	3385	3736	4064	4371	4660	4934	5195	5443	5681	5909
19	7425	3614	6070	7631	8778	9688	0441	1086	1649	2150	2601	3013	3391	3742	4069	4376	4665	4939	5199	5447	5685	5913
20	7648	3669	6101	7652	8795	9701	0453	1096	1658	2158	2609	3020	3397	3748	4074	4381	4669	4943	5203	5451	5689	5917
21	7860	3723	6132	7674	8812	9715	0464	1106	1667	2166	2616	3026	3403	3753	4079	4386	4674	4947	5207	5455	5693	5921
22	8062	3776	6163	7696	8829	9729	0476	1116	1675	2174	2623	3033	3409	3759	4085	4390	4679	4952	5212	5459	5696	5924
23	8255	3829	6193	7717	8845	9742	0487	1125	1684	2181	2630	3039	3416	3764	4090	4395	4683	4956	5216	5463	5700	5928
24	8439	3881	6223	7739	8862	9756	0499	1135	1693	2189	2637	3046	3422	3770	4095	4400	4688	4961	5220	5467	5704	5932
25	8617	3932	6254	7760	8878	9769	0510	1145	1702	2197	2644	3052	3428	3776	4100	4405	4693	4965	5224	5471	5708	5935
26	8787	3983	6283	7781	8895	9782	0521	1155	1710	2205	2651	3059	3434	3781	4106	4410	4697	4970	5228	5475	5712	5939
27	8951	4033	6313	7802	8911	9796	0533	1165	1719	2213	2658	3065	3440	3787	4111	4415	4702	4974	5233	5479	5716	5943
28	9109	4083	6343	7823	8927	9809	0544	1175	1728	2221	2666	3072	3446	3792	4116	4420	4707	4978	5237	5483	5720	5947
29	9261	4132	6372	7844	8944	9823	0555	1185	1736	2228	2673	3078	3452	3798	4121	4425	4711	4983	5241	5487	5724	5950
	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

P. P.		
	15	14
1	1.5	1.4
2	3.0	2.8
3	4.5	4.2
4	6.0	5.6
5	7.5	7.0
6	9.0	8.4
7	10.5	9.8
8	12.0	11.2
9	13.5	12.6
	13	12
1	1.3	1.2
2	2.6	2.4
3	3.9	3.6
4	5.2	4.8
5	6.5	6.0
6	7.8	7.2
7	9.1	8.4
8	10.4	9.6
9	11.7	10.8
	11	9
1	1.1	0.9
2	2.2	1.8
3	3.3	2.7
4	4.4	3.6
5	5.5	4.5
6	6.6	5.4
7	7.7	6.3
8	8.8	7.2
9	9.9	8.1

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°
30	$\bar{9}$409	4181	6401	7865	8960	$\bar{9}$836	0567	1194	1745	2236	2680	3085	3458	3804	4127	4430	4716	4987	5245	5491	5727	5954
31	$\bar{9}$551	4229	6430	7886	8976	$\bar{9}$849	0578	1204	1754	2244	2687	3091	3464	3809	4132	4435	4721	4992	5249	5496	5731	5958
32	$\bar{9}$689	4276	6459	7906	8992	$\bar{9}$862	0589	1214	1762	2252	2694	3098	3469	3815	4137	4440	4725	4996	5254	5500	5735	5961
33	$\bar{9}$823	4323	6487	7927	9008	$\bar{9}$875	0600	1223	1771	2259	2701	3104	3475	3820	4142	4445	4730	5000	5258	5504	5739	5965
34	$\bar{9}$952	4370	6515	7947	9024	$\bar{9}$888	0611	1233	1779	2267	2708	3110	3481	3826	4147	4449	4735	5005	5262	5508	5743	5969
35	0078	4416	6544	7967	9040	$\bar{9}$901	0622	1243	1788	2275	2715	3117	3487	3831	4153	4454	4739	5009	5266	5512	5747	5972
36	0200	4461	6571	7988	9056	$\bar{9}$915	0633	1252	1797	2282	2722	3123	3493	3837	4158	4459	4744	5014	5270	5516	5750	5976
37	0319	4506	6599	8008	9071	$\bar{9}$928	0645	1262	1805	2290	2729	3130	3499	3842	4163	4464	4748	5018	5275	5520	5754	5980
38	0435	4551	6627	8028	9087	$\bar{9}$940	0656	1272	1814	2298	2736	3136	3505	3848	4168	4469	4753	5022	5279	5524	5758	5984
39	0548	4595	6654	8048	9103	$\bar{9}$953	0667	1281	1822	2305	2743	3142	3511	3853	4173	4474	4758	5027	5283	5528	5762	5987
40	0658	4638	6682	8067	9118	$\bar{9}$966	0678	1291	1831	2313	2750	3149	3517	3859	4178	4479	4762	5031	5287	5531	5766	5991
41	0765	4682	6709	8087	9134	$\bar{9}$979	0688	1300	1839	2321	2757	3155	3523	3864	4184	4484	4767	5035	5291	5535	5770	5995
42	0870	4725	6736	8107	9150	$\bar{9}$992	0699	1310	1848	2328	2764	3162	3529	3870	4189	4488	4771	5040	5295	5539	5773	5998
43	0972	4767	6762	8126	9165	0005	0710	1319	1856	2336	2770	3168	3535	3875	4194	4493	4776	5044	5300	5543	5777	6002
44	1072	4809	6789	8146	9180	0017	0721	1329	1864	2343	2777	3174	3541	3881	4199	4498	4781	5049	5304	5547	5781	6006
45	1170	4851	6815	8165	9196	0030	0732	1338	1873	2351	2784	3181	3546	3886	4204	4503	4785	5053	5308	5551	5785	6009
46	1265	4892	6842	8185	9211	0043	0743	1348	1881	2359	2791	3187	3552	3892	4209	4508	4790	5057	5312	5555	5789	6013
47	1359	4933	6868	8204	9226	0055	0754	1357	1890	2366	2798	3193	3558	3897	4214	4513	4794	5062	5316	5559	5792	6017
48	1450	4973	6894	8223	9241	0068	0764	1367	1898	2374	2805	3200	3564	3903	4220	4517	4799	5066	5320	5563	5796	6020
49	1540	5013	6920	8242	9256	0080	0775	1376	1906	2381	2812	3206	3570	3908	4225	4522	4803	5070	5324	5567	5800	6024
50	1627	5053	6945	8261	9272	0093	0786	1385	1915	2389	2819	3212	3576	3914	4230	4527	4808	5075	5329	5571	5804	6028
51	1713	5092	6971	8280	9287	0105	0796	1395	1923	2396	2825	3219	3581	3919	4235	4532	4813	5079	5333	5575	5808	6031
52	1798	5131	6996	8299	9302	0118	0807	1404	1931	2404	2832	3225	3587	3924	4240	4537	4817	5083	5337	5579	5811	6035
53	1880	5170	7021	8317	9316	0130	0818	1413	1940	2411	2839	3231	3593	3930	4245	4541	4822	5088	5341	5583	5815	6039
54	1962	5208	7046	8336	9331	0143	0828	1423	1948	2419	2846	3237	3599	3935	4250	4546	4826	5092	5345	5587	5819	6042
55	2041	5246	7071	8355	9346	0155	0839	1432	1956	2426	2853	3244	3605	3941	4255	4551	4831	5096	5349	5591	5823	6046
56	2120	5283	7096	8373	9361	0167	0849	1441	1964	2434	2859	3250	3611	3946	4260	4556	4835	5101	5353	5595	5827	6050
57	2196	5321	7121	8392	9376	0180	0860	1450	1973	2441	2866	3256	3616	3952	4265	4561	4840	5105	5357	5599	5830	6053
58	2272	5358	7145	8410	9390	0192	0871	1460	1981	2448	2873	3262	3622	3957	4270	4565	4844	5109	5362	5603	5834	6057
59	2346	5394	7170	8428	9405	0204	0881	1469	1989	2456	2880	3269	3628	3962	4275	4570	4849	5113	5366	5607	5838	6060
	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

P. P.		
	8	7
1	0.8	0.7
2	1.6	1.4
3	2.4	2.1
4	3.2	2.8
5	4.0	3.5
6	4.8	4.2
7	5.6	4.9
8	6.4	5.6
9	7.2	6.3
	6	5
1	0.6	0.5
2	1.2	1.0
3	1.8	1.5
4	2.4	2.0
5	3.0	2.5
6	3.6	3.0
7	4.2	3.5
8	4.8	4.0
9	5.4	4.5
	4	3
1	0.4	0.3
2	0.8	0.6
3	1.2	0.9
4	1.6	1.2
5	2.0	1.5
6	2.4	1.8
7	2.8	2.1
8	3.2	2.4
9	3.6	2.7

Log. Tangens 22^0—44^0.

′	22^0	23^0	24^0	25^0	26^0	27^0	28^0	29^0	**30^0**	31^0	32^0	33^0	34^0	35^0	36^0	37^0	38^0	39^0	**40^0**	41^0	42^0	43^0	44^0	P. P.
0	6064	6279	6486	6687	6882	7072	7257	7438	7614	7788	7958	8125	8290	8452	8613	8771	8928	9084	9238	9392	9544	9697	9848	4
1	6068	6282	6489	6690	6885	7075	7260	7441	7617	7791	7961	8128	8293	8455	8615	8774	8931	9086	9241	9394	9547	9699	9851	1 0.4
2	6071	6286	6493	6693	6888	7078	7263	7443	7620	7793	7964	8131	8295	8458	8618	8776	8933	9089	9243	9397	9549	9702	9853	2 0.8
3	6075	6289	6496	6697	6891	7081	7266	7446	7623	7796	7966	8133	8298	8460	8621	8779	8936	9091	9246	9399	9552	9704	9856	3 1.2
4	6079	6293	6499	6700	6895	7084	7269	7449	7626	7799	7969	8136	8301	8463	8623	8782	8939	9094	9248	9402	9555	9707	9858	4 1.6
5	6082	6296	6503	6703	6898	7087	7272	7452	7629	7802	7972	8139	8303	8466	8626	8784	8941	9097	9251	9404	9557	9709	9861	5 2.0
6	6086	6300	6506	6706	6901	7090	7275	7455	7632	7805	7975	8142	8306	8468	8629	8787	8944	9099	9254	9407	9560	9712	9864	6 2.4
7	6090	6303	6510	6710	6904	7093	7278	7458	7635	7808	7978	8145	8309	8471	8631	8790	8946	9102	9256	9409	9562	9714	9866	7 2.8
8	6093	6307	6513	6713	6907	7097	7281	7461	7638	7811	7980	8147	8312	8474	8634	8792	8949	9104	9259	9412	9565	9717	9869	8 3.2
9	6097	6310	6516	6716	6911	7100	7284	7464	7641	7813	7983	8150	8314	8476	8637	8795	8952	9107	9261	9415	9567	9719	9871	9 3.6
10	6100	6314	6520	6720	6914	7103	7287	7467	7644	7816	7986	8153	8317	8479	8639	8797	8954	9110	9264	9417	9570	9722	9874	
11	6104	6317	6523	6723	6917	7106	7290	7470	7646	7819	7989	8156	8320	8482	8642	8800	8957	9112	9266	9420	9572	9724	9876	
12	6108	6321	6527	6726	6920	7109	7293	7473	7649	7822	7992	8158	8323	8484	8644	8803	8959	9115	9269	9422	9575	9727	9879	
13	6111	6324	6530	6729	6923	7112	7296	7476	7652	7825	7994	8161	8325	8487	8647	8805	8962	9117	9271	9425	9577	9729	9881	
14	6115	6328	6533	6733	6927	7115	7299	7479	7655	7828	7997	8164	8328	8490	8650	8808	8965	9120	9274	9427	9580	9732	9884	
15	6118	6331	6537	6736	6930	7118	7302	7482	7658	7831	8000	8167	8331	8493	8652	8811	8967	9122	9277	9430	9582	9735	9886	
16	6122	6334	6540	6739	6933	7121	7305	7485	7661	7833	8003	8169	8333	8495	8655	8813	8970	9125	9279	9432	9585	9737	9889	
17	6126	6338	6543	6743	6936	7125	7308	7488	7664	7836	8006	8172	8336	8498	8658	8816	8972	9128	9282	9435	9588	9740	9891	
18	6129	6341	6547	6746	6939	7128	7311	7491	7667	7839	8008	8175	8339	8501	8660	8818	8975	9130	9284	9438	9590	9742	9894	
19	6133	6345	6550	6749	6942	7131	7314	7494	7670	7842	8011	8178	8342	8503	8663	8821	8978	9133	9287	9440	9593	9745	9896	
20	6136	6348	6553	6752	6946	7134	7317	7497	7673	7845	8014	8180	8344	8506	8666	8824	8980	9135	9289	9443	9595	9747	9899	3
21	6140	6352	6557	6756	6949	7137	7320	7500	7675	7848	8017	8183	8347	8509	8668	8826	8983	9138	9292	9445	9598	9750	9901	1 0.3
22	6144	6355	6560	6759	6952	7140	7324	7503	7678	7850	8020	8186	8350	8511	8671	8829	8985	9140	9295	9448	9600	9752	9904	2 0.6
23	6147	6359	6564	6762	6955	7143	7327	7506	7681	7853	8022	8189	8352	8514	8674	8831	8988	9143	9297	9450	9603	9755	9907	3 0.9
24	6151	6362	6567	6765	6958	7146	7330	7509	7684	7856	8025	8191	8355	8517	8676	8834	8990	9146	9300	9453	9605	9757	9909	4 1.2
25	6154	6366	6570	6769	6962	7149	7333	7512	7687	7859	8028	8194	8358	8519	8679	8837	8993	9148	9302	9455	9608	9760	9912	5 1.5
26	6158	6369	6574	6772	6965	7152	7336	7515	7690	7862	8031	8197	8361	8522	8682	8839	8996	9151	9305	9458	9610	9762	9914	6 1.8
27	6162	6373	6577	6775	6968	7156	7339	7518	7693	7865	8034	8200	8363	8525	8684	8842	8998	9153	9307	9460	9613	9765	9917	7 2.1
28	6165	6376	6580	6778	6971	7159	7342	7521	7696	7868	8036	8202	8366	8527	8687	8845	9001	9156	9310	9463	9615	9767	9919	8 2.4
29	6169	6380	6584	6782	6974	7162	7345	7523	7699	7870	8039	8205	8369	8530	8689	8847	9003	9158	9312	9466	9618	9770	9922	9 2.7
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	

′	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	**30°**	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	**40°**	41°	42°	43°	44°	P. P.
30	6172	6383	6587	6785	6977	7165	7348	7526	7701	7873	8042	8208	8371	8533	8692	8850	9006	9161	9315	9468	9621	9773	9924	
31	6176	6386	6590	6788	6981	7168	7351	7529	7704	7876	8045	8211	8374	8535	8695	8852	9009	9164	9318	9471	9623	9775	9927	
32	6179	6390	6594	6791	6984	7171	7354	7532	7707	7879	8047	8213	8377	8538	8697	8855	9011	9166	9320	9473	9626	9778	9929	
33	6183	6393	6597	6795	6987	7174	7357	7535	7710	7882	8050	8216	8379	8541	8700	8858	9014	9169	9323	9476	9628	9780	9932	
34	6187	6397	6600	6798	6990	7177	7360	7538	7713	7885	8053	8219	8382	8543	8703	8860	9016	9171	9325	9478	9631	9783	9934	
35	6190	6400	6604	6801	6993	7180	7363	7541	7716	7887	8056	8222	8385	8546	8705	8863	9019	9174	9328	9481	9633	9785	9937	
36	6194	6404	6607	6804	6996	7183	7366	7544	7719	7890	8059	8224	8388	8549	8708	8865	9022	9176	9330	9483	9636	9788	9939	
37	6197	6407	6610	6808	6999	7186	7369	7547	7722	7893	8061	8227	8390	8551	8711	8868	9024	9179	9333	9486	9638	9790	9942	
38	6201	6411	6614	6811	7003	7189	7372	7550	7725	7896	8064	8230	8393	8554	8713	8871	9027	9182	9335	9488	9641	9793	9944	
39	6204	6414	6617	6814	7006	7192	7375	7553	7727	7899	8067	8233	8396	8557	8716	8873	9029	9184	9338	9491	9643	9795	9947	
40	6208	6417	6620	6817	7009	7196	7378	7556	7730	7902	8070	8235	8398	8559	8718	8876	9032	9187	9341	9494	9646	9798	9949	2
41	6211	6421	6624	6821	7012	7199	7381	7559	7733	7904	8072	8238	8401	8562	8721	8879	9035	9189	9343	9496	9648	9800	9952	1 0.2
42	6215	6424	6627	6824	7015	7202	7384	7562	7736	7907	8075	8241	8404	8565	8724	8881	9037	9192	9346	9499	9651	9803	9955	2 0.4
43	6219	6428	6630	6827	7018	7205	7387	7565	7739	7910	8078	8243	8406	8567	8726	8884	9040	9194	9348	9501	9653	9805	9957	3 0.6
44	6222	6431	6634	6830	7022	7208	7390	7568	7742	7913	8081	8246	8409	8570	8729	8886	9042	9197	9351	9504	9656	9808	9960	4 0.8
45	6226	6435	6637	6834	7025	7211	7393	7571	7745	7916	8084	8249	8412	8573	8732	8889	9045	9200	9353	9506	9659	9810	9962	5 1.0
46	6229	6438	6640	6837	7028	7214	7396	7573	7748	7918	8086	8252	8415	8575	8734	8892	9047	9202	9356	9509	9661	9813	9965	6 1.2
47	6233	6441	6644	6840	7031	7217	7399	7576	7750	7921	8089	8254	8417	8578	8737	8894	9050	9205	9358	9511	9664	9816	9967	7 1.4
48	6236	6445	6647	6843	7034	7220	7402	7579	7753	7924	8092	8257	8420	8581	8740	8897	9053	9207	9361	9514	9666	9818	9970	8 1.6
49	6240	6448	6650	6846	7037	7223	7405	7582	7756	7927	8095	8260	8423	8583	8742	8899	9055	9210	9364	9516	9669	9821	9972	9 1.8
50	6243	6452	6654	6850	7040	7226	7408	7585	7759	7930	8097	8263	8425	8586	8745	8902	9058	9212	9366	9519	9671	9823	9975	
51	6247	6455	6657	6853	7043	7229	7411	7588	7762	7933	8100	8265	8428	8589	8747	8905	9060	9215	9369	9522	9674	9826	9977	
52	6250	6459	6660	6856	7047	7232	7414	7591	7765	7935	8103	8268	8431	8591	8750	8907	9063	9218	9371	9524	9676	9828	9980	
53	6254	6462	6664	6859	7050	7235	7417	7594	7768	7938	8106	8271	8433	8594	8753	8910	9066	9220	9374	9527	9679	9831	9982	
54	6257	6465	6667	6863	7053	7238	7420	7597	7771	7941	8109	8274	8436	8597	8755	8912	9068	9223	9376	9529	9681	9833	9985	
55	6261	6469	6670	6866	7056	7241	7423	7600	7773	7944	8111	8276	8439	8599	8758	8915	9071	9225	9379	9532	9684	9836	9987	
56	6264	6472	6674	6869	7059	7245	7426	7603	7776	7947	8114	8279	8442	8602	8761	8918	9073	9228	9381	9534	9686	9838	9990	
57	6268	6476	6677	6872	7062	7248	7429	7606	7779	7949	8117	8282	8444	8605	8763	8920	9076	9230	9384	9537	9689	9841	9992	
58	6271	6479	6680	6875	7065	7251	7432	7609	7782	7952	8120	8284	8447	8607	8766	8923	9079	9233	9387	9539	9691	9843	9995	
59	6275	6482	6683	6879	7069	7254	7435	7611	7785	7955	8122	8287	8450	8610	8769	8925	9081	9236	9389	9542	9694	9846	9997	
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	

Log. Tangens 45^0—67^0.

′	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°	65°	66°	67°
0	0000	0152	0303	0456	0608	0762	0916	1072	1229	1387	1548	1710	1875	2042	2212	2386	2562	2743	2928	3118	3313	3514	3721
1	0003	0154	0306	0458	0611	0764	0919	1075	1231	1390	1550	1713	1878	2045	2215	2389	2565	2746	2931	3121	3317	3518	3725
2	0005	0157	0309	0461	0613	0767	0921	1077	1234	1393	1553	1716	1880	2048	2218	2391	2568	2749	2935	3125	3320	3521	3729
3	0008	0159	0311	0463	0616	0770	0924	1080	1237	1395	1556	1718	1883	2051	2221	2394	2571	2752	2938	3128	3323	3524	3732
4	0010	0162	0314	0466	0619	0772	0927	1082	1239	1398	1558	1721	1886	2053	2224	2397	2574	2755	2941	3131	3326	3528	3736
5	0013	0164	0316	0468	0621	0775	0929	1085	1242	1401	1561	1724	1889	2056	2227	2400	2577	2759	2944	3134	3330	3531	3739
6	0015	0167	0319	0471	0624	0777	0932	1088	1245	1403	1564	1726	1891	2059	2229	2403	2580	2762	2947	3137	3333	3535	3743
7	0018	0169	0321	0473	0626	0780	0934	1090	1247	1406	1567	1729	1894	2062	2232	2406	2583	2765	2950	3141	3336	3538	3746
8	0020	0172	0324	0476	0629	0782	0937	1093	1250	1409	1569	1732	1897	2065	2235	2409	2586	2768	2953	3144	3340	3541	3750
9	0023	0174	0326	0478	0631	0785	0940	1095	1253	1411	1572	1735	1900	2067	2238	2412	2589	2771	2957	3147	3343	3545	3753
10	0025	0177	0329	0481	0634	0788	0942	1098	1255	1414	1575	1737	1903	2070	2241	2415	2592	2774	2960	3150	3346	3548	3757
11	0028	0179	0331	0484	0636	0790	0945	1101	1258	1417	1577	1740	1905	2073	2244	2418	2595	2777	2963	3154	3350	3552	3760
12	0030	0182	0334	0486	0639	0793	0947	1103	1260	1419	1580	1743	1908	2076	2247	2421	2598	2780	2966	3157	3353	3555	3764
13	0033	0184	0336	0489	0642	0795	0950	1106	1263	1422	1583	1746	1911	2079	2250	2424	2601	2783	2969	3160	3356	3559	3767
14	0035	0187	0339	0491	0644	0798	0953	1108	1266	1425	1585	1748	1914	2082	2252	2427	2604	2786	2972	3163	3360	3562	3771
15	0038	0190	0341	0494	0647	0800	0955	1111	1268	1427	1588	1751	1916	2084	2255	2429	2607	2789	2975	3166	3363	3565	3774
16	0040	0192	0344	0496	0649	0803	0958	1114	1271	1430	1591	1754	1919	2087	2258	2432	2610	2792	2978	3170	3366	3569	3778
17	0043	0195	0347	0499	0652	0806	0960	1116	1274	1433	1594	1757	1922	2090	2261	2435	2613	2795	2982	3173	3370	3572	3781
18	0045	0197	0349	0501	0654	0808	0963	1119	1276	1435	1596	1759	1925	2093	2264	2438	2616	2798	2985	3176	3373	3576	3785
19	0048	0200	0352	0504	0657	0811	0965	1121	1279	1438	1599	1762	1928	2096	2267	2441	2619	2801	2988	3179	3376	3579	3789
20	0051	0202	0354	0506	0659	0813	0968	1124	1282	1441	1602	1765	1930	2098	2270	2444	2622	2804	2991	3183	3380	3583	3792
21	0053	0205	0357	0509	0662	0816	0971	1127	1284	1443	1604	1767	1933	2101	2273	2447	2625	2808	2994	3186	3383	3586	3796
22	0056	0207	0359	0512	0665	0818	0973	1129	1287	1446	1607	1770	1936	2104	2275	2450	2628	2811	2997	3189	3386	3589	3799
23	0058	0210	0362	0514	0667	0821	0976	1132	1289	1449	1610	1773	1939	2107	2278	2453	2631	2814	3001	3192	3390	3593	3803
24	0061	0212	0364	0517	0670	0824	0978	1135	1292	1451	1612	1776	1941	2110	2281	2456	2634	2817	3004	3196	3393	3596	3806
25	0063	0215	0367	0519	0672	0826	0981	1137	1295	1454	1615	1778	1944	2113	2284	2459	2637	2820	3007	3199	3396	3600	3810
26	0066	0217	0369	0522	0675	0829	0984	1140	1297	1457	1618	1781	1947	2115	2287	2462	2640	2823	3010	3202	3400	3603	3813
27	0068	0220	0372	0524	0677	0831	0986	1142	1300	1459	1621	1784	1950	2118	2290	2465	2643	2826	3013	3205	3403	3607	3817
28	0071	0222	0374	0527	0680	0834	0989	1145	1303	1462	1623	1787	1953	2121	2293	2468	2646	2829	3016	3209	3406	3610	3821
29	0073	0225	0377	0529	0682	0836	0991	1148	1305	1465	1626	1789	1955	2124	2296	2471	2649	2832	3019	3212	3410	3614	3824
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

P. P.	2	3
1	0.2	0.3
2	0.4	0.6
3	0.6	0.9
4	0.8	1.2
5	1.0	1.5
6	1.2	1.8
7	1.4	2.1
8	1.6	2.4
9	1.8	2.7

′	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°	65°	66°	67°	P. P.
30	0076	0228	0379	0532	0685	0839	0994	1150	1308	1467	1629	1792	1958	2127	2299	2474	2652	2835	3023	3215	3413	3617	3828	
31	0078	0230	0382	0534	0688	0842	0997	1153	1311	1470	1631	1795	1961	2130	2301	2477	2655	2838	3026	3218	3416	3620	3831	
32	0081	0233	0385	0537	0690	0844	0999	1155	1313	1473	1634	1798	1964	2132	2304	2479	2658	2841	3029	3222	3420	3624	3835	
33	0083	0235	0387	0540	0693	0847	1002	1158	1316	1475	1637	1800	1966	2135	2307	2482	2661	2844	3032	3225	3423	3627	3838	
34	0086	0238	0390	0542	0695	0849	1004	1161	1318	1478	1639	1803	1969	2138	2310	2485	2664	2848	3035	3228	3426	3631	3842	
35	0088	0240	0392	0545	0698	0852	1007	1163	1321	1481	1642	1806	1972	2141	2313	2488	2667	2851	3038	3231	3430	3634	3846	
36	0091	0243	0395	0547	0700	0854	1010	1166	1324	1483	1645	1809	1975	2144	2316	2491	2670	2854	3042	3235	3433	3638	3849	
37	0093	0245	0397	0550	0703	0857	1012	1169	1326	1486	1648	1811	1978	2147	2319	2494	2673	2857	3045	3238	3436	3641	3853	
38	0096	0248	0400	0552	0705	0860	1015	1171	1329	1489	1650	1814	1980	2150	2322	2497	2676	2860	3048	3241	3440	3645	3856	
39	0099	0250	0402	0555	0708	0862	1017	1174	1332	1491	1653	1817	1983	2152	2325	2500	2680	2863	3051	3244	3443	3648	3860	
40	0101	0253	0405	0557	0711	0865	1020	1176	1334	1494	1656	1820	1986	2155	2327	2503	2683	2866	3054	3248	3447	3652	3864	4
41	0104	0255	0407	0560	0713	0867	1022	1179	1337	1497	1658	1822	1989	2158	2330	2506	2686	2869	3058	3251	3450	3655	3867	1 0.4
42	0106	0258	0410	0562	0716	0870	1025	1182	1340	1499	1661	1825	1992	2161	2333	2509	2689	2872	3061	3254	3453	3659	3871	2 0.8
43	0109	0260	0412	0565	0718	0872	1028	1184	1342	1502	1664	1828	1994	2164	2336	2512	2692	2875	3064	3257	3457	3662	3874	3 1.2
44	0111	0263	0415	0568	0721	0875	1030	1187	1345	1505	1667	1831	1997	2167	2339	2515	2695	2879	3067	3261	3460	3666	3878	4 1.6
45	0114	0265	0418	0570	0723	0878	1033	1189	1348	1507	1669	1833	2000	2169	2342	2518	2698	2882	3070	3264	3463	3669	3882	5 2.0
46	0116	0268	0420	0573	0726	0880	1035	1192	1350	1510	1672	1836	2003	2172	2345	2521	2701	2885	3073	3267	3467	3672	3885	6 2.4
47	0119	0271	0423	0575	0729	0883	1038	1195	1353	1513	1675	1839	2006	2175	2348	2524	2704	2888	3077	3271	3470	3676	3889	7 2.8
48	0121	0273	0425	0578	0731	0885	1041	1197	1356	1516	1677	1842	2008	2178	2351	2527	2707	2891	3080	3274	3473	3679	3892	8 3.2
49	0124	0276	0428	0580	0734	0888	1043	1200	1358	1518	1680	1844	2011	2181	2354	2530	2710	2894	3083	3277	3477	3683	3896	9 3.6
50	0126	0278	0430	0583	0736	0890	1046	1203	1361	1521	1683	1847	2014	2184	2356	2533	2713	2897	3086	3280	3480	3686	3900	
51	0129	0281	0433	0585	0739	0893	1048	1205	1364	1524	1686	1850	2017	2187	2359	2536	2716	2900	3089	3284	3484	3690	3903	
52	0131	0283	0435	0588	0741	0896	1051	1208	1366	1526	1688	1853	2020	2189	2362	2539	2719	2903	3093	3287	3487	3693	3907	
53	0134	0286	0438	0591	0744	0898	1054	1210	1369	1529	1691	1855	2022	2192	2365	2542	2722	2907	3096	3290	3490	3697	3910	
54	0136	0288	0440	0593	0746	0901	1056	1213	1371	1532	1694	1858	2025	2195	2368	2545	2725	2910	3099	3294	3494	3700	3914	
55	0139	0291	0443	0596	0749	0903	1059	1216	1374	1534	1697	1861	2028	2198	2371	2548	2728	2913	3102	3297	3497	3704	3918	
56	0142	0293	0445	0598	0752	0906	1061	1218	1377	1537	1699	1864	2031	2201	2374	2551	2731	2916	3105	3300	3501	3707	3921	
57	0144	0296	0448	0601	0754	0909	1064	1221	1379	1540	1702	1867	2034	2204	2377	2554	2734	2919	3109	3303	3504	3711	3925	
58	0147	0298	0451	0603	0757	0911	1067	1224	1382	1542	1705	1869	2036	2207	2380	2557	2737	2922	3112	3307	3507	3714	3929	
59	0149	0301	0453	0606	0759	0914	1069	1226	1385	1545	1707	1872	2039	2209	2383	2560	2740	2925	3115	3310	3511	3718	3932	
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	

Log. Tangens 68^0—89^0.

′	68°	69°	70°	71°	72°	73°	74°	75°	76°	77°	78°	79°	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°
0	3936	4158	4389	4630	4882	5147	5425	5719	6032	6366	6725	7113	7537	8003	8522	9109	$\bar{9}$784	0580	1554	2806	4569	$\bar{7}$581
1	3940	4162	4393	4634	4887	5151	5430	5725	6038	6372	6731	7120	7544	8011	8531	9119	$\bar{9}$796	0595	1572	2830	4606	$\bar{7}$654
2	3943	4166	4397	4638	4891	5156	5435	5730	6043	6378	6738	7127	7552	8019	8540	9129	$\bar{9}$808	0610	1590	2855	4642	$\bar{7}$728
3	3947	4170	4401	4643	4895	5160	5439	5735	6048	6384	6744	7134	7559	8027	8550	9140	$\bar{9}$820	0624	1608	2879	4679	$\bar{7}$804
4	3950	4173	4405	4647	4899	5165	5444	5740	6054	6389	6750	7141	7566	8036	8559	9151	$\bar{9}$833	0639	1627	2904	4717	$\bar{7}$880
5	3954	4177	4409	4651	4904	5169	5449	5745	6059	6395	6756	7147	7574	8044	8568	9161	$\bar{9}$845	0654	1645	2929	4754	$\bar{7}$959
6	3958	4181	4413	4655	4908	5174	5454	5750	6065	6401	6763	7154	7581	8052	8577	9172	$\bar{9}$857	0669	1664	2954	4792	$\bar{8}$038
7	3961	4185	4417	4659	4912	5178	5459	5755	6070	6407	6769	7161	7589	8060	8587	9182	$\bar{9}$870	0684	1683	2979	4830	$\bar{8}$120
8	3965	4189	4421	4663	4917	5183	5463	5760	6076	6413	6775	7168	7596	8069	8596	9193	$\bar{9}$882	0698	1701	3004	4869	$\bar{8}$202
9	3969	4192	4425	4667	4921	5187	5468	5765	6081	6419	6781	7175	7604	8077	8605	9204	$\bar{9}$895	0713	1720	3029	4908	$\bar{8}$287
10	3972	4196	4429	4671	4925	5192	5473	5770	6086	6424	6788	7181	7611	8085	8615	9214	$\bar{9}$907	0728	1739	3055	4947	$\bar{8}$373
11	3976	4200	4433	4676	4930	5197	5478	5775	6092	6430	6794	7188	7619	8094	8624	9225	$\bar{9}$920	0744	1758	3080	4987	$\bar{8}$460
12	3980	4204	4437	4680	4934	5201	5483	5780	6097	6436	6800	7195	7626	8102	8633	9236	$\bar{9}$932	0759	1777	3106	5027	$\bar{8}$550
13	3983	4208	4441	4684	4938	5206	5487	5786	6103	6442	6807	7202	7634	8110	8643	9246	$\bar{9}$945	0774	1796	3132	5067	8641
14	3987	4211	4445	4688	4943	5210	5492	5791	6108	6448	6813	7209	7641	8119	8652	9257	$\bar{9}$957	0789	1815	3158	5108	$\bar{8}$735
15	3991	4215	4449	4692	4947	5215	5497	5796	6114	6454	6819	7216	7649	8127	8662	9268	$\bar{9}$970	0804	1835	3185	5149	$\bar{8}$830
16	3994	4219	4453	4696	4951	5219	5502	5801	6119	6459	6826	7223	7657	8136	8671	9279	$\bar{9}$983	0820	1854	3211	5191	$\bar{8}$928
17	3998	4223	4457	4700	4956	5224	5507	5806	6125	6465	6832	7230	7664	8144	8681	9290	$\bar{9}$995	0835	1874	3238	5233	$\bar{9}$028
18	4002	4227	4461	4705	4960	5229	5512	5811	6130	6471	6838	7236	7672	8152	8690	9301	0008	0850	1893	3264	5275	$\bar{9}$130
19	4005	4230	4465	4709	4965	5233	5516	5816	6136	6477	6845	7243	7679	8161	8700	9312	0021	0866	1913	3291	5318	$\bar{9}$235
20	4009	4234	4469	4713	4969	5238	5521	5822	6141	6483	6851	7250	7687	8169	8709	9322	0034	0882	1933	3318	5362	$\bar{9}$342
21	4013	4238	4473	4717	4973	5242	5526	5827	6147	6489	6858	7257	7695	8178	8719	9333	0047	0897	1952	3346	5405	$\bar{9}$452
22	4016	4242	4476	4721	4978	5247	5531	5832	6152	6495	6864	7264	7702	8186	8728	9344	0060	0913	1972	3373	5449	$\bar{9}$565
23	4020	4246	4480	4725	4982	5252	5536	5837	6158	6501	6870	7271	7710	8195	8738	9355	0072	0929	1992	3401	5494	$\bar{9}$681
24	4024	4250	4484	4730	4986	5256	5541	5842	6163	6507	6877	7278	7718	8203	8748	9367	0085	0944	2012	3429	5539	$\bar{9}$800
25	4028	4253	4488	4734	4991	5261	5546	5847	6169	6513	6883	7285	7725	8212	8757	9378	0099	0960	2033	3456	5584	$\bar{9}$922
26	4031	4257	4492	4738	4995	5265	5551	5853	6174	6519	6890	7292	7733	8221	8767	9389	0112	0976	2053	3485	5630	0048
27	4035	4261	4496	4742	5000	5270	5555	5858	6180	6525	6896	7299	7741	8229	8777	9400	0125	0992	2073	3513	5677	0177
28	4039	4265	4500	4746	5004	5275	5560	5863	6185	6531	6902	7306	7748	8238	8786	9411	0138	1008	2094	3541	5724	0311
29	4042	4269	4505	4751	5008	5279	5565	5868	6191	6536	6909	7313	7756	8246	8796	9422	0151	1024	2114	3570	5771	0449
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	12

P. P.		
	3	4
1	0.3	0.4
2	0.6	0.8
3	0.9	1.2
4	1.2	1.6
5	1.5	2.0
6	1.8	2.4
7	2.1	2.8
8	2.4	3.2
9	2.7	3.6
	5	6
1	0.5	0.6
2	1.0	1.2
3	1.5	1.8
4	2.0	2.4
5	2.5	3.0
6	3.0	3.6
7	3.5	4.2
8	4.0	4.8
9	4.5	5.4
	7	8
1	0.7	0.8
2	1.4	1.6
3	2.1	2.4
4	2.8	3.2
5	3.5	4.0
6	4.2	4.8
7	4.9	5.6
8	5.6	6.4
9	6.3	7.2

′	68°	69°	70°	71°	72°	73°	74°	75°	76°	77°	78°	79°	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°	P.	P.
30	4046	4273	4509	4755	5013	5284	5570	5873	6196	6542	6915	7320	7764	8255	8806	9433	0164	1040	2135	3599	5819	0591		9	11
31	4050	4276	4513	4759	5017	5289	5575	5879	6202	6548	6922	7327	7772	8264	8815	9445	0177	1056	2156	3628	5868	0739	1	0.9	1.1
32	4053	4280	4517	4763	5022	5293	5580	5884	6208	6554	6928	7334	7779	8272	8825	9456	0191	1073	2177	3657	5917	0891	2	1.8	2.2
33	4057	4284	4521	4767	5026	5298	5585	5889	6213	6560	6935	7342	7787	8281	8835	9467	0204	1089	2198	3687	5967	1049	3	2.7	3.3
34	4061	4288	4525	4772	5030	5303	5590	5894	6219	6566	6941	7349	7795	8290	8845	9479	0218	1105	2219	3717	6017	1213	4	3.6	4.4
35	4065	4292	4529	4776	5035	5307	5595	5900	6224	6572	6948	7356	7803	8298	8855	9490	0231	1122	2240	3746	6068	1383	5	4.5	5.5
36	4068	4296	4533	4780	5039	5312	5600	5905	6230	6578	6954	7363	7811	8307	8865	9501	0244	1138	2261	3777	6119	1561	6	5.4	6.6
37	4072	4300	4537	4784	5044	5317	5605	5910	6236	6584	6961	7370	7819	8316	8875	9513	0258	1155	2283	3807	6171	1745	7	6.3	7.7
38	4076	4304	4541	4788	5048	5321	5610	5915	6241	6591	6967	7377	7826	8325	8884	9524	0271	1171	2304	3837	6224	1938	8	7.2	8.8
39	4079	4307	4545	4793	5053	5326	5614	5921	6247	6597	6974	7384	7834	8333	8894	9536	0285	1188	2326	3868	6277	2140	9	8.1	9.9
40	4083	4311	4549	4797	5057	5331	5619	5926	6252	6603	6980	7391	7842	8342	8904	9547	0299	1205	2348	3899	6331	2352		12	13
41	4087	4315	4553	4801	5061	5335	5624	5931	6258	6609	6987	7399	7850	8351	8914	9559	0312	1222	2369	3930	6386	2575	1	1.2	1.3
42	4091	4319	4557	4805	5066	5340	5629	5936	6264	6615	6994	7406	7858	8360	8924	9570	0326	1238	2391	3962	6441	2810	2	2.4	2.6
43	4094	4323	4561	4810	5070	5345	5634	5942	6269	6621	7000	7413	7866	8369	8934	9582	0340	1255	2413	3993	6497	3058	3	3.6	3.9
44	4098	4327	4565	4814	5075	5349	5639	5947	6275	6627	7007	7420	7874	8378	8945	9593	0354	1272	2435	4025	6554	3322	4	4.8	5.2
45	4102	4331	4569	4818	5079	5354	5644	5952	6281	6633	7013	7427	7882	8387	8955	9605	0367	1289	2458	4057	6611	3602	5	6.0	6.5
46	4106	4335	4573	4822	5084	5359	5649	5958	6286	6639	7020	7435	7890	8395	8965	9617	0381	1306	2480	4089	6670	3901	6	7.2	7.8
47	4109	4338	4577	4827	5088	5363	5654	5963	6292	6645	7027	7442	7898	8404	8975	9629	0395	1324	2503	4122	6729	4223	7	8.4	9.1
48	4113	4342	4581	4831	5093	5368	5659	5968	6298	6651	7033	7449	7906	8413	8985	9640	0409	1341	2525	4155	6789	4571	8	9.6	10.4
49	4117	4346	4585	4835	5097	5373	5664	5973	6303	6657	7040	7456	7914	8422	8995	9652	0423	1358	2548	4188	6850	4949	9	10.8	11.7
50	4121	4350	4589	4839	5102	5378	5669	5979	6309	6664	7047	7464	7922	8431	9005	9664	0437	1376	2571	4221	6911	5363		14	15
51	4124	4354	4593	4844	5106	5382	5674	5984	6315	6670	7053	7471	7930	8440	9016	9676	0451	1393	2594	4255	6974	5820	1	1.4	1.5
52	4128	4358	4597	4848	5111	5387	5679	5989	6320	6676	7060	7478	7938	8449	9026	9688	0466	1411	2617	4289	7037	6332	2	2.8	3.0
53	4132	4362	4602	4852	5115	5392	5684	5995	6326	6682	7067	7485	7946	8458	9036	9700	0480	1428	2640	4323	7101	6912	3	4.2	4.5
54	4136	4366	4606	4857	5120	5397	5689	6000	6332	6688	7073	7493	7954	8467	9046	9711	0494	1446	2663	4357	7167	7581	4	5.6	6.0
55	4139	4370	4610	4861	5124	5401	5694	6005	6338	6694	7080	7500	7962	8476	9057	9723	0508	1464	2687	4392	7233	8373	5	7.0	7.5
56	4143	4374	4614	4865	5129	5406	5699	6011	6343	6700	7087	7507	7970	8485	9067	9735	0523	1482	2710	4427	7300	9342	6	8.4	9.0
57	4147	4378	4618	4869	5133	5411	5704	6016	6349	6707	7093	7515	7978	8495	9077	9747	0537	1499	2734	4462	7369	0592	7	9.8	10 5
58	4151	4381	4622	4874	5138	5416	5709	6022	6355	6713	7100	7522	7987	8504	9088	9760	0551	1517	2758	4497	7438	2352	8	11.2	12.0
59	4154	4385	4626	4878	5142	5420	5714	6027	6361	6719	7107	7529	7995	8513	9098	9772	0566	1535	2782	4533	7509	5363	9	12.6	13.5
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	13			

Log. Sinus 0°—21°.

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°
0	−∞	2419	5428	7188	8436	9403	0192	0859	1436	1943	2397	2806	3179	3521	3837	4130	4403	4659	4900	5126	5341	5543
1	$\bar{4}$637	2490	5464	7212	8454	9417	0204	0869	1445	1951	2404	2812	3185	3526	3842	4135	4408	4663	4904	5130	5344	5547
2	$\bar{7}$648	2561	5500	7236	8472	9432	0216	0879	1453	1959	2411	2819	3191	3532	3847	4139	4412	4668	4908	5134	5347	5550
3	$\bar{9}$408	2630	5535	7260	8490	9446	0228	0890	1462	1967	2418	2825	3197	3537	3852	4144	4417	4672	4911	5137	5351	5553
4	0658	2699	5571	7283	8508	9460	0240	0900	1471	1975	2425	2832	3202	3543	3857	4149	4421	4676	4915	5141	5354	5557
5	1627	2766	5605	7307	8525	9475	0252	0910	1480	1983	2432	2838	3208	3548	3862	4153	4425	4680	4919	5145	5358	5560
6	2419	2832	5640	7330	8543	9489	0264	0920	1489	1991	2439	2845	3214	3554	3867	4158	4430	4684	4923	5148	5361	5563
7	3088	2898	5674	7354	8560	9503	0276	0930	1498	1999	2447	2851	3220	3559	3872	4163	4434	4688	4927	5152	5365	5566
8	3668	2962	5708	7377	8578	9517	0287	0940	1507	2007	2454	2858	3226	3564	3877	4168	4438	4692	4931	5156	5368	5570
9	4180	3025	5742	7400	8595	9531	0299	0951	1516	2015	2461	2864	3232	3570	3882	4172	4443	4696	4935	5159	5372	5573
10	4637	3088	5776	7423	8613	9545	0311	0961	1525	2022	2468	2870	3238	3575	3887	4177	4447	4700	4939	5163	5375	5576
11	5051	3150	5809	7445	8630	9559	0323	0971	1533	2030	2475	2877	3244	3581	3892	4181	4452	4705	4942	5167	5379	5579
12	5429	3210	5842	7468	8647	9573	0334	0981	1542	2038	2482	2883	3250	3586	3897	4186	4456	4709	4946	5170	5382	5583
13	5777	3270	5875	7491	8665	9587	0346	0991	1551	2046	2489	2890	3255	3591	3902	4191	4460	4713	4950	5174	5385	5586
14	6099	3329	5907	7513	8682	9601	0357	1001	1560	2054	2496	2896	3261	3597	3907	4195	4465	4717	4954	5177	5389	5589
15	6398	3388	5939	7535	8699	9614	0369	1011	1568	2061	2503	2902	3267	3602	3912	4200	4469	4721	4958	5181	5392	5592
16	6678	3445	5972	7557	8716	9628	0380	1020	1577	2069	2510	2909	3273	3608	3917	4205	4473	4725	4962	5185	5396	5596
17	6942	3502	6003	7580	8733	9642	0392	1030	1586	2077	2517	2915	3279	3613	3922	4209	4478	4729	4965	5188	5399	5599
18	7190	3558	6035	7602	8749	9655	0403	1040	1594	2085	2524	2921	3284	3618	3927	4214	4482	4733	4969	5192	5402	5602
19	7425	3613	6066	7623	8766	9669	0415	1050	1603	2092	2531	2928	3290	3624	3932	4219	4486	4737	4973	5196	5406	5605
20	7648	3668	6097	7645	8783	9682	0426	1060	1612	2100	2538	2934	3296	3629	3937	4223	4491	4741	4977	5199	5409	5609
21	7859	3722	6128	7667	8799	9696	0438	1070	1620	2108	2545	2940	3302	3634	3942	4228	4495	4745	4981	5203	5413	5612
22	8061	3775	6159	7688	8816	9709	0449	1080	1629	2115	2551	2947	3308	3640	3947	4232	4499	4749	4984	5206	5416	5615
23	8255	3828	6189	7710	8833	9723	0460	1089	1637	2123	2558	2953	3313	3645	3952	4237	4503	4753	4988	5210	5420	5618
24	8439	3880	6220	7731	8849	9736	0472	1099	1646	2131	2565	2959	3319	3650	3957	4242	4508	4757	4992	5213	5423	5621
25	8617	3931	6250	7752	8865	9750	0483	1109	1655	2138	2572	2965	3325	3655	3961	4246	4512	4761	4996	5217	5426	5625
26	8787	3982	6279	7773	8882	9763	0494	1118	1663	2146	2579	2972	3331	3661	3966	4251	4516	4765	5000	5221	5430	5628
27	8951	4032	6309	7794	8898	9776	0505	1128	1672	2153	2586	2978	3336	3666	3971	4255	4521	4769	5003	5224	5433	5631
28	9109	4082	6339	7815	8914	9789	0516	1138	1680	2161	2593	2984	3342	3671	3976	4260	4525	4773	5007	5228	5436	5634
29	9261	4131	6368	7836	8930	9803	0527	1147	1689	2169	2600	2990	3348	3677	3981	4264	4529	4777	5011	5231	5440	5638
	7	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

P. P.		
	15	14
1	1.5	1.4
2	3.0	2.8
3	4.5	4.2
4	6.0	5.6
5	7.5	7.0
6	9.0	8.4
7	10.5	9.8
8	12.0	11.2
9	13.5	12.6
	13	12
1	1.3	1.2
2	2.6	2.4
3	3.9	3.6
4	5.2	4.8
5	6.5	6.0
6	7.8	7.2
7	9.1	8.4
8	10.4	9.6
9	11.7	10.8
	11	9
1	1.1	0.9
2	2.2	1.8
3	3.3	2.7
4	4.4	3.6
5	5.5	4.5
6	6.6	5.4
7	7.7	6.3
8	8.8	7.2
9	9.9	8.1

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°
30	$\bar{9}$408	4179	6397	7857	8946	$\bar{9}$816	0539	1157	1697	2176	2606	2997	3353	3682	3986	4269	4533	4781	5015	5235	5443	5641
31	$\bar{9}$551	4227	6426	7877	8962	$\bar{9}$829	0550	1167	1705	2184	2613	3003	3359	3687	3991	4274	4538	4785	5019	5239	5447	5644
32	$\bar{9}$689	4275	6454	7898	8978	$\bar{9}$842	0561	1176	1714	2191	2620	3009	3365	3692	3996	4278	4542	4789	5022	5242	5450	5647
33	$\bar{9}$822	4322	6483	7918	8994	$\bar{9}$855	0572	1186	1722	2199	2627	3015	3370	3698	4001	4283	4546	4793	5026	5246	5453	5650
34	$\bar{9}$952	4368	6511	7939	9010	$\bar{9}$868	0583	1195	1731	2206	2634	3021	3376	3703	4005	4287	4550	4797	5030	5249	5457	5654
35	0078	4414	6539	7959	9026	$\bar{9}$881	0594	1205	1739	2214	2640	3027	3382	3708	4010	4292	4555	4801	5034	5253	5460	5657
36	0200	4459	6567	7979	9042	$\bar{9}$894	0605	1214	1747	2221	2647	3034	3387	3713	4015	4296	4559	4805	5037	5256	5463	5660
37	0319	4504	6595	7999	9057	$\bar{9}$907	0616	1224	1756	2229	2654	3040	3393	3719	4020	4301	4563	4809	5041	5260	5467	5663
38	0435	4549	6622	8019	9073	$\bar{9}$919	0626	1233	1764	2236	2661	3046	3399	3724	4025	4305	4567	4813	5045	5263	5470	5666
39	0548	4593	6650	8039	9089	$\bar{9}$932	0637	1242	1772	2243	2667	3052	3404	3729	4030	4310	4572	4817	5049	5267	5474	5670
40	0658	4637	6677	8059	9104	$\bar{9}$945	0648	1252	1781	2251	2674	3058	3410	3734	4035	4314	4576	4821	5052	5270	5477	5673
41	0765	4680	6704	8078	9119	$\bar{9}$958	0659	1261	1789	2258	2681	3064	3416	3739	4039	4319	4580	4825	5056	5274	5480	5676
42	0870	4723	6731	8098	9135	$\bar{9}$970	0670	1271	1797	2266	2687	3070	3421	3745	4044	4323	4584	4829	5060	5278	5484	5679
43	0972	4765	6758	8117	9150	$\bar{9}$983	0680	1280	1806	2273	2694	3077	3427	3750	4049	4328	4588	4833	5064	5281	5487	5682
44	1072	4807	6784	8137	9166	$\bar{9}$996	0691	1289	1814	2280	2701	3083	3432	3755	4054	4332	4593	4837	5067	5285	5490	5685
45	1170	4848	6810	8156	9181	0008	0702	1299	1822	2288	2707	3089	3438	3760	4059	4337	4597	4841	5071	5288	5494	5689
46	1265	4890	6837	8175	9196	0021	0712	1308	1830	2295	2714	3095	3444	3765	4063	4341	4601	4845	5075	5292	5497	5692
47	1359	4930	6863	8194	9211	0033	0723	1317	1838	2303	2721	3101	3449	3770	4068	4346	4605	4849	5078	5295	5500	5695
48	1450	4971	6889	8213	9226	0046	0734	1326	1847	2310	2727	3107	3455	3775	4073	4350	4609	4853	5082	5299	5504	5698
49	1540	5011	6914	8232	9241	0058	0744	1336	1855	2317	2734	3113	3460	3781	4078	4355	4614	4857	5086	5302	5507	5701
50	1627	5050	6940	8251	9256	0070	0755	1345	1863	2324	2740	3119	3466	3786	4083	4359	4618	4861	5090	5306	5510	5704
51	1713	5090	6965	8270	9271	0083	0765	1354	1871	2332	2747	3125	3471	3791	4087	4364	4622	4865	5093	5309	5514	5708
52	1798	5129	6991	8289	9286	0095	0776	1363	1879	2339	2754	3131	3477	3796	4092	4368	4626	4869	5097	5313	5517	5711
53	1880	5167	7016	8307	9301	0107	0786	1372	1887	2346	2760	3137	3482	3801	4097	4372	4630	4873	5101	5316	5520	5714
54	1962	5206	7041	8326	9315	0120	0797	1381	1895	2353	2767	3143	3488	3806	4102	4377	4634	4876	5104	5320	5523	5717
55	2041	5243	7066	8345	9330	0132	0807	1390	1903	2361	2773	3149	3493	3811	4106	4381	4639	4880	5108	5323	5527	5720
56	2120	5281	7090	8363	9345	0144	0818	1399	1911	2368	2780	3155	3499	3816	4111	4386	4643	4884	5112	5327	5530	5723
57	2196	5318	7115	8381	9359	0156	0828	1409	1919	2375	2786	3161	3504	3822	4116	4390	4647	4888	5115	5330	5533	5726
58	2272	5355	7140	8400	9374	0168	0838	1418	1927	2382	2793	3167	3510	3827	4121	4395	4651	4892	5119	5334	5537	5729
59	2346	5392	7164	8418	9388	0180	0849	1427	1935	2390	2799	3173	3515	3832	4125	4399	4655	4896	5123	5337	5540	5733
	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

P. P.		
	8	7
1	0.8	0.7
2	1.6	1.4
3	2.4	2.1
4	3.2	2.8
5	4.0	3.5
6	4.8	4.2
7	5.6	4.9
8	6.4	5.6
9	7.2	6.3
	6	5
1	0.6	0.5
2	1.2	1.0
3	1.8	1.5
4	2.4	2.0
5	3.0	2.5
6	3.6	3.0
7	4.2	3.5
8	4.8	4.0
9	5.4	4.5
	4	3
1	0.4	0.3
2	0.8	0.6
3	1.2	0.9
4	1.6	1.2
5	2.0	1.5
6	2.4	1.8
7	2.8	2.1
8	3.2	2.4
9	3.6	2.7

Log. Sinus 22^0—44^0.

′	22^0	23^0	24^0	25^0	26^0	27^0	28^0	29^0	30^0	31^0	32^0	33^0	34^0	35^0	36^0	37^0	38^0	39^0	40^0	41^0	42^0	43^0	44^0	P.P.
0	5736	5919	6093	6259	6418	6570	6716	6856	6990	7118	7242	7361	7476	7586	7692	7795	7893	7989	8081	8169	8255	8338	8418	4
1	5739	5922	6096	6262	6421	6573	6718	6858	6992	7120	7244	7363	7477	7588	7694	7796	7895	7990	8082	8171	8257	8339	8419	1 0.4
2	5742	5925	6099	6265	6424	6575	6721	6860	6994	7123	7246	7365	7479	7590	7696	7798	7897	7992	8084	8172	8258	8341	8420	2 0.8
3	5745	5928	6102	6268	6426	6578	6723	6863	6996	7125	7248	7367	7481	7591	7697	7800	7898	7993	8085	8174	8259	8342	8422	3 1.2
4	5748	5931	6104	6270	6429	6580	6726	6865	6998	7127	7250	7369	7483	7593	7699	7801	7900	7995	8087	8175	8261	8343	8423	4 1.6
5	5751	5934	6107	6273	6431	6583	6728	6867	7001	7129	7252	7371	7485	7595	7701	7803	7901	7997	8088	8177	8262	8345	8424	5 2.0
6	5754	5937	6110	6276	6434	6585	6730	6869	7003	7131	7254	7373	7487	7597	7703	7805	7903	7998	8090	8178	8264	8346	8426	6 2.4
7	5758	5940	6113	6278	6437	6588	6733	6872	7005	7133	7256	7375	7489	7599	7704	7806	7905	8000	8091	8180	8265	8347	8427	7 2.8
8	5761	5943	6116	6281	6439	6590	6735	6874	7007	7135	7258	7377	7491	7600	7706	7808	7906	8001	8093	8181	8266	8349	8428	8 3.2
9	5764	5945	6119	6284	6442	6592	6737	6876	7009	7137	7260	7379	7492	7602	7708	7810	7908	8003	8094	8182	8268	8350	8429	9 3.6
10	5767	5948	6121	6286	6444	6595	6740	6878	7012	7139	7262	7380	7494	7604	7710	7811	7910	8004	8096	8184	8269	8351	8431	
11	5770	5951	6124	6289	6447	6598	6742	6881	7014	7141	7264	7382	7496	7606	7711	7813	7911	8006	8097	8185	8270	8353	8432	
12	5773	5954	6127	6292	6449	6600	6744	6883	7016	7144	7266	7384	7498	7607	7713	7815	7913	8007	8099	8187	8272	8354	8433	
13	5776	5957	6130	6295	6452	6603	6747	6885	7018	7146	7268	7386	7500	7609	7715	7816	7914	8009	8100	8188	8273	8355	8435	
14	5779	5960	6133	6297	6454	6605	6749	6887	7020	7148	7270	7388	7502	7611	7716	7818	7916	8010	8102	8190	8275	8357	8436	
15	5782	5963	6135	6300	6457	6607	6752	6890	7022	7150	7272	7390	7504	7613	7718	7820	7918	8012	8103	8191	8276	8358	8437	
16	5785	5966	6138	6303	6460	6610	6754	6892	7025	7152	7274	7392	7505	7615	7720	7821	7919	8014	8105	8193	8277	8359	8439	
17	5789	5969	6141	6305	6462	6612	6756	6894	7027	7154	7276	7394	7507	7616	7722	7823	7921	8015	8106	8194	8279	8361	8440	
18	5792	5972	6144	6308	6465	6615	6759	6896	7029	7156	7278	7396	7509	7618	7723	7825	7922	8017	8108	8195	8280	8362	8441	
19	5795	5975	6147	6311	6467	6617	6761	6899	7031	7158	7280	7398	7511	7620	7725	7826	7924	8018	8109	8197	8282	8363	8442	
20	5798	5978	6149	6313	6470	6620	6763	6901	7033	7160	7282	7400	7513	7622	7727	7828	7926	8020	8111	8198	8283	8365	8444	3
21	5801	5981	6152	6316	6472	6622	6766	6903	7035	7162	7284	7402	7515	7624	7728	7830	7927	8021	8112	8200	8284	8366	8445	1 0.3
22	5804	5984	6155	6319	6475	6625	6768	6905	7037	7164	7286	7404	7517	7625	7730	7831	7929	8023	8114	8201	8286	8367	8446	2 0.6
23	5807	5987	6158	6321	6477	6627	6770	6908	7040	7166	7288	7406	7518	7627	7732	7833	7930	8024	8115	8203	8287	8369	8448	3 0.9
24	5810	5990	6161	6324	6480	6629	6773	6910	7042	7168	7290	7407	7520	7629	7734	7835	7932	8026	8117	8204	8289	8370	8449	4 1.2
25	5813	5992	6163	6327	6483	6632	6775	6912	7044	7171	7292	7409	7522	7631	7735	7836	7934	8027	8118	8205	8290	8371	8450	5 1.5
26	5816	5995	6166	6329	6485	6634	6777	6914	7046	7173	7294	7411	7524	7632	7737	7838	7935	8029	8120	8207	8291	8373	8451	6 1.8
27	5819	5998	6169	6332	6488	6637	6780	6917	7048	7175	7296	7413	7526	7634	7739	7840	7937	8031	8121	8208	8293	8374	8453	7 2.1
28	5822	6001	6172	6335	6490	6639	6782	6919	7050	7177	7298	7415	7528	7636	7740	7841	7938	8032	8122	8210	8294	8375	8454	8 2.4
29	5825	6004	6174	6337	6493	6642	6784	6921	7053	7179	7300	7417	7529	7638	7742	7843	7940	8034	8124	8211	8295	8377	8455	9 2.7
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	

′	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	**30°**	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	**40°**	41°	42°	43°	44°	P. P
30	5828	6007	6177	6340	6495	6644	6787	6923	7055	7181	7302	7419	7531	7640	7744	7844	7941	8035	8125	8213	8297	8378	8457	2
31	5831	6010	6180	6342	6498	6646	6789	6926	7057	7183	7304	7421	7533	7641	7746	7846	7943	8037	8127	8214	8298	8379	8458	1 0.2
32	5834	6013	6183	6345	6500	6649	6791	6928	7059	7185	7306	7423	7535	7643	7747	7848	7945	8038	8128	8216	8300	8381	8459	2 0.4
33	5838	6016	6186	6348	6503	6651	6794	6930	7061	7187	7308	7425	7537	7645	7749	7849	7946	8040	8130	8217	8301	8382	8460	3 0.6
34	5841	6019	6188	6350	6505	6654	6796	6932	7063	7189	7310	7427	7539	7647	7751	7851	7948	8041	8131	8218	8302	8383	8462	4 0.8
35	5844	6021	6191	6353	6508	6656	6798	6935	7065	7191	7312	7428	7540	7648	7752	7853	7949	8043	8133	8220	8304	8385	8463	5 1 0
36	5847	6024	6194	6356	6510	6659	6801	6937	7068	7193	7314	7430	7542	7650	7754	7854	7951	8044	8134	8221	8305	8386	8464	6 1.2
37	5850	6027	6197	6358	6513	6661	6803	6939	7070	7195	7316	7432	7544	7652	7756	7856	7953	8046	8136	8223	8306	8387	8466	7 1.4
38	5853	6030	6199	6361	6515	6663	6805	6941	7072	7197	7318	7434	7546	7654	7757	7858	7954	8047	8137	8224	8308	8389	8467	8 1.6
39	5856	6033	6202	6364	6518	6666	6808	6943	7074	7199	7320	7436	7548	7655	7759	7859	7956	8049	8139	8225	8309	8390	8468	9 1.8
40	5859	6036	6205	6366	6521	6668	6810	6946	7076	7201	7322	7438	7550	7657	7761	7861	7957	8050	8140	8227	8311	8391	8469	
41	5862	6039	6208	6369	6523	6671	6812	6948	7078	7203	7324	7440	7551	7659	7763	7863	7959	8052	8142	8228	8312	8393	8471	
42	5865	6042	6210	6371	6526	6673	6814	6950	7080	7205	7326	7442	7553	7661	7764	7864	7960	8053	8143	8230	8313	8394	8472	
43	5868	6045	6213	6374	6528	6675	6817	6952	7082	7208	7328	7444	7555	7662	7766	7866	7962	8055	8145	8231	8315	8395	8473	
44	5871	6047	6216	6377	6531	6678	6819	6955	7085	7210	7330	7445	7557	7664	7768	7867	7964	8056	8146	8233	8316	8397	8475	
45	5874	6050	6219	6379	6533	6680	6821	6957	7087	7212	7332	7447	7559	7666	7769	7869	7965	8058	8148	8234	8317	8398	8476	
46	5877	6053	6221	6382	6536	6683	6824	6959	7089	7214	7334	7449	7561	7668	7771	7871	7967	8060	8149	8235	8319	8399	8477	
47	5880	6056	6224	6385	6538	6685	6826	6961	7091	7216	7336	7451	7562	7669	7773	7872	7968	8061	8150	8237	8320	8401	8478	
48	5883	6059	6227	6387	6541	6687	6828	6963	7093	7218	7338	7453	7564	7671	7774	7874	7970	8063	8152	8238	8322	8402	8480	
49	5886	6062	6230	6390	6543	6690	6831	6966	7095	7220	7340	7455	7566	7673	7776	7876	7971	8064	8153	8240	8323	8403	8481	
50	5889	6065	6232	6392	6546	6692	6833	6968	7097	7222	7342	7457	7568	7675	7778	7877	7973	8066	8155	8241	8324	8405	8482	
51	5892	6068	6235	6395	6548	6695	6835	6970	7099	7224	7344	7459	7570	7676	7780	7879	7975	8067	8156	8242	8326	8406	8483	
52	5895	6070	6238	6398	6551	6697	6837	6972	7102	7226	7345	7461	7571	7678	7781	7880	7976	8069	8158	8244	8327	8407	8485	
53	5898	6073	6240	6400	6553	6699	6840	6974	7104	7228	7347	7462	7573	7680	7783	7882	7978	8070	8159	8245	8328	8409	8486	
54	5901	6076	6243	6403	6556	6702	6842	6977	7106	7230	7349	7464	7575	7682	7785	7884	7979	8072	8161	8247	8330	8410	8487	
55	5904	6079	6246	6405	6558	6704	6844	6979	7108	7232	7351	7466	7577	7683	7786	7885	7981	8073	8162	8248	8331	8411	8489	
56	5907	6082	6249	6408	6561	6707	6847	6981	7110	7234	7353	7468	7579	7685	7788	7887	7982	8075	8164	8249	8332	8412	8490	
57	5910	6085	6251	6411	6563	6709	6849	6983	7112	7236	7355	7470	7580	7687	7790	7889	7984	8076	8165	8251	8334	8414	8491	
58	5913	6087	6254	6413	6566	6711	6851	6985	7114	7238	7357	7472	7582	7689	7791	7890	7986	8078	8167	8252	8335	8415	8492	
59	5916	6090	6257	6416	6568	6714	6853	6988	7116	7240	7359	7474	7584	7690	7793	7892	7987	8079	8168	8254	8336	8416	8494	
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	

Log. Sinus 45^0—67^0.

′	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°	56°	57°	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°	65°	66°	67°	P.P.
0	8495	8569	8641	8711	8778	8843	8905	8965	9023	9080	9134	9186	9236	9284	9331	9375	9418	9459	9499	9537	9573	9607	9640	
2	8497	8572	8644	8713	8780	8845	8907	8967	9025	9081	9135	9187	9238	9286	9332	9377	9420	9461	9500	9538	9574	9608	9641	
4	8500	8574	8646	8715	8782	8847	8909	8969	9027	9083	9137	9189	9239	9287	9334	9378	9421	9462	9501	9539	9575	9610	9642	
6	8502	8577	8648	8718	8784	8849	8911	8971	9029	9085	9139	9191	9241	9289	9335	9380	9422	9463	9503	9540	9576	9611	9643	
8	8505	8579	8651	8720	8787	8851	8913	8973	9031	9087	9141	9193	9242	9291	9337	9381	9424	9465	9504	9542	9577	9612	9645	
10	8507	8582	8653	8722	8789	8853	8915	8975	9033	9089	9142	9194	9244	9292	9338	9383	9425	9466	9505	9543	9579	9613	9646	
12	8510	8584	8655	8724	8791	8855	8917	8977	9035	9091	9144	9196	9246	9294	9340	9384	9427	9467	9507	9544	9580	9614	9647	
14	8512	8586	8658	8727	8793	8857	8919	8979	9037	9092	9146	9198	9247	9295	9341	9385	9428	9469	9508	9545	9581	9615	9648	
16	8515	8589	8660	8729	8795	8859	8921	8981	9039	9094	9148	9199	9249	9297	9343	9387	9429	9470	9509	9546	9582	9616	9649	
18	8517	8591	8662	8731	8797	8862	8923	8983	9041	9096	9149	9201	9251	9298	9344	9388	9431	9471	9510	9548	9583	9617	9650	
20	8520	8594	8665	8733	8800	8864	8925	8985	9042	9098	9151	9203	9252	9300	9346	9390	9432	9473	9512	9549	9584	9618	9651	
22	8522	8596	8667	8736	8802	8866	8927	8987	9044	9100	9153	9204	9254	9301	9347	9391	9433	9474	9513	9550	9586	9620	9652	
24	8525	8598	8669	8738	8804	8868	8929	8989	9046	9101	9155	9206	9255	9303	9349	9393	9435	9475	9514	9551	9587	9621	9653	
26	8527	8601	8672	8740	8806	8870	8931	8991	9048	9103	9156	9208	9257	9305	9350	9394	9436	9477	9515	9552	9588	9622	9654	
28	8530	8603	8674	8742	8808	8872	8933	8993	9050	9105	9158	9209	9259	9306	9352	9396	9438	9478	9517	9554	9589	9623	9655	
30	8532	8606	8676	8745	8810	8874	8935	8995	9052	9107	9160	9211	9260	9308	9353	9397	9439	9479	9518	9555	9590	9624	9656	
32	8535	8608	8679	8747	8813	8876	8937	8997	9054	9109	9162	9213	9262	9309	9355	9398	9440	9481	9519	9556	9591	9625	9657	
34	8537	8610	8681	8749	8815	8878	8939	8999	9056	9110	9163	9214	9264	9311	9356	9400	9442	9482	9520	9557	9593	9626	9658	
36	8540	8613	8683	8751	8817	8880	8941	9000	9057	9112	9165	9216	9265	9312	9358	9401	9443	9483	9522	9558	9594	9627	9659	
38	8542	8615	8686	8753	8819	8882	8943	9002	9059	9114	9167	9218	9267	9314	9359	9403	9444	9485	9523	9560	9595	9628	9660	
40	8545	8618	8688	8756	8821	8884	8945	9004	9061	9116	9169	9219	9268	9315	9361	9404	9446	9486	9524	9561	9596	9629	9661	
42	8547	8620	8690	8758	8823	8887	8947	9006	9063	9118	9170	9221	9270	9317	9362	9406	9447	9487	9525	9562	9597	9631	9662	
44	8550	8622	8692	8760	8825	8889	8949	9008	9065	9119	9172	9223	9272	9318	9364	9407	9449	9488	9527	9563	9598	9632	9663	
46	8552	8625	8695	8762	8828	8891	8951	9010	9067	9121	9174	9224	9273	9320	9365	9408	9450	9490	9528	9564	9599	9633	9664	
48	8555	8627	8697	8765	8830	8893	8953	9012	9069	9123	9175	9226	9275	9322	9367	9410	9451	9491	9529	9566	9601	9634	9666	
50	8557	8629	8699	8767	8832	8895	8955	9014	9070	9125	9177	9228	9276	9323	9368	9411	9453	9492	9530	9567	9602	9635	9667	
52	8560	8632	8702	8769	8834	8897	8957	9016	9072	9127	9179	9229	9278	9325	9369	9413	9454	9494	9532	9568	9603	9636	9668	
54	8562	8635	8704	8771	8836	8899	8959	9018	9074	9128	9181	9231	9279	9326	9371	9414	9455	9495	9533	9569	9604	9637	9669	
56	8564	8637	8706	8773	8838	8901	8961	9020	9076	9130	9182	9233	9281	9328	9372	9415	9457	9496	9534	9570	9605	9638	9670	
58	8567	8639	8708	8776	8840	8903	8963	9022	9078	9132	9184	9234	9283	9329	9374	9417	9458	9498	9535	9572	9606	9639	9671	
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	

Log. Sinus 68^0—89^0.

′	68^0	69^0	70^0	71^0	72^0	73^0	74^0	75^0	76^0	77^0	78^0	79^0	80^0	81^0	82^0	83^0	84^0	85^0	86^0	87^0	88^0	89^0	P. P.
0	9672	9702	9730	9757	9782	9806	9828	9849	9869	9887	9904	9919	9934	9946	9958	9968	9976	9983	9989	9994	9997	$\bar{9}$999	
2	9673	9702	9731	9758	9783	9807	9829	9850	9870	9888	9905	9920	9934	9947	9958	9968	9976	9984	9990	9994	9997	$\bar{9}$999	
4	9674	9703	9732	9758	9784	9808	9830	9851	9870	9888	9905	9920	9934	9947	9958	9968	9977	9984	9990	9994	9998	$\bar{9}$999	
6	9675	9704	9733	9759	9785	9808	9831	9851	9871	9889	9906	9921	9935	9947	9959	9968	9977	9984	9990	9994	9998	$\bar{9}$999	
8	9676	9705	9734	9760	9785	9809	9831	9852	9872	9890	9906	9921	9935	9948	9959	9969	9977	9984	9990	9995	9998	0000	
10	9677	9706	9734	9761	9786	9810	9832	9853	9872	9890	9907	9922	9936	9948	9959	9969	9977	9985	9990	9995	9998	0000	
12	9678	9707	9735	9762	9787	9811	9833	9853	9873	9891	9907	9922	9936	9949	9960	9969	9978	9985	9990	9995	9998	0000	
14	9679	9708	9736	9763	9788	9811	9833	9854	9873	9891	9908	9923	9937	9949	9960	9970	9978	9985	9991	9995	9998	0000	
16	9680	9709	9737	9764	9789	9812	9834	9855	9874	9892	9908	9923	9937	9949	9960	9970	9978	9985	9991	9995	9998	0000	
18	9681	9710	9738	9764	9789	9813	9835	9855	9875	9892	9909	9924	9937	9950	9961	9970	9978	9985	9991	9995	9998	0000	
20	9682	9711	9739	9765	9790	9814	9836	9856	9875	9893	9909	9924	9938	9950	9961	9971	9979	9986	9991	9995	9998	0000	
22	9683	9712	9740	9766	9791	9814	9836	9857	9876	9894	9910	9925	9938	9951	9961	9971	9979	9986	9991	9995	9998	0000	
24	9684	9713	9741	9767	9792	9815	9837	9857	9876	9894	9910	9925	9939	9951	9962	9971	9979	9986	9991	9996	9998	0000	
26	9685	9714	9742	9768	9793	9816	9838	9858	9877	9895	9911	9926	9939	9951	9962	9971	9979	9986	9992	9996	9998	0000	
28	9686	9715	9743	9769	9793	9817	9838	9859	9878	9895	9911	9926	9940	9952	9962	9972	9980	9986	9992	9996	9998	0000	
30	9687	9716	9743	9770	9794	9817	9839	9859	9878	9896	9912	9927	9940	9952	9963	9972	9980	9987	9992	9996	9999	0000	
32	9688	9717	9744	9770	9795	9818	9840	9860	9879	9896	9912	9927	9940	9952	9963	9972	9980	9987	9992	9996	9999	0000	
34	9689	9718	9745	9771	9796	9819	9841	9861	9880	9897	9913	9928	9941	9953	9963	9973	9980	9987	9992	9996	9999	0000	
36	9690	9719	9746	9772	9797	9820	9841	9861	9880	9897	9913	9928	9941	9953	9964	9973	9981	9987	9992	9996	9999	0000	
38	9691	9720	9747	9773	9797	9820	9842	9862	9881	9898	9914	9929	9942	9954	9964	9973	9981	9987	9992	9996	9999	0000	
40	9692	9721	9748	9774	9798	9821	9843	9863	9881	9899	9914	9929	9942	9954	9964	9973	9981	9988	9993	9996	9999	0000	
42	9693	9722	9749	9775	9799	9822	9843	9863	9882	9899	9915	9929	9943	9954	9965	9974	9981	9988	9993	9997	9999	0000	
44	9694	9722	9750	9775	9800	9823	9844	9864	9883	9900	9915	9930	9943	9955	9965	9974	9982	9988	9993	9997	9999	0000	
46	9695	9723	9751	9776	9801	9823	9845	9865	9883	9900	9916	9930	9943	9955	9965	9974	9982	9988	9993	9997	9999	0000	
48	9696	9724	9751	9777	9801	9824	9845	9865	9884	9901	9916	9931	9944	9955	9966	9975	9982	9988	9993	9997	9999	0000	
50	9697	9725	9752	9778	9802	9825	9846	9866	9884	9901	9917	9931	9944	9956	9966	9975	9982	9989	9993	9997	9999	0000	
52	9698	9726	9753	9779	9803	9826	9847	9867	9885	9902	9917	9932	9945	9956	9966	9975	9983	9989	9994	9997	9999	0000	
54	9699	9727	9754	9780	9804	9826	9847	9867	9885	9902	9918	9932	9945	9956	9967	9975	9983	9989	9994	9997	9999	0000	
56	9700	9728	9755	9780	9804	9827	9848	9868	9886	9903	9918	9933	9945	9957	9967	9976	9983	9989	9994	9997	9999	0000	
58	9701	9729	9756	9781	9805	9828	9849	9868	9887	9904	9919	9933	9946	9957	9967	9976	9983	9989	9994	9997	9999	0000	
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10	

Tafel der Complement- und Supplement-Winkel.

0^0—29^0			30^0—59^0			60^0—89^0			0′—2′		3′—5′		6′—8′		9′—11′		12′—14′		15′—17′		18′—20′		21′—23′		24′—26′		27′—29′	
89	**0°**	179	59	**30°**	149	29	**60°**	119	**0,′0**	**60,′0**	**3,′0**	**57,′0**	**6,′0**	**54,′0**	**9,′0**	**51,′0**	**12,′0**	**48,′0**	**15,′0**	**45,′0**	**18,′0**	**42,′0**	**21,′0**	**39,′0**	**24,′0**	**36,′0**	**27,′0**	**33,′0**
88	1	178	58	31	148	28	61	118	0,1	59,9	3,1	56,9	6,1	53,9	9,1	50,9	12,1	47,9	15,1	44,9	18,1	41,9	21,1	38,9	24,1	35,9	27,1	32,9
87	2	177	57	32	147	27	62	117	0,2	59,8	3,2	56,8	6,2	53,8	9,2	50,8	12,2	47,8	15,2	44,8	18,2	41,8	21,2	38,8	24,2	35,8	27,2	32,8
86	3	176	56	33	146	26	63	116	0,3	59,7	3,3	56,7	6,3	53,7	9,3	50,7	12,3	47,7	15,3	44,7	18,3	41,7	21,3	38,7	24,3	35,7	27,3	32,7
85	4	175	55	34	145	25	64	115	0,4	59,6	3,4	56,6	6,4	53,6	9,4	50,6	12,4	47,6	15,4	44,6	18,4	41,6	21,4	38,6	24,4	35,6	27,4	32,6
84	5	174	54	35	144	24	65	114	0,5	59,5	3,5	56,5	6,5	53,5	9,5	50,5	12,5	47,5	15,5	44,5	18,5	41,5	21,5	38,5	24,5	35,5	27,5	32,5
83	6	173	53	36	143	23	66	113	0,6	59,4	3,6	56,4	6,6	53,4	9,6	50,4	12,6	47,4	15,6	44,4	18,6	41,4	21,6	38,4	24,6	35,4	27,6	32,4
82	7	172	52	37	142	22	67	112	0,7	59,3	3,7	56,3	6,7	53,3	9,7	50,3	12,7	47,3	15,7	44,3	18,7	41,3	21,7	38,3	24,7	35,3	27,7	32,3
81	8	171	51	38	141	21	68	111	0,8	59,2	3,8	56,2	6,8	53,2	9,8	50,2	12,8	47,2	15,8	44,2	18,8	41,2	21,8	38,2	24,8	35,2	27,8	32,2
80	9	170	50	39	140	20	69	110	0.9	59,1	3,9	56,1	6,9	53,1	9,9	50,1	12,9	47,1	15,9	44,1	18,9	41,1	21,9	38,1	24,9	35,1	27,9	32,1
79	**10°**	169	49	**40°**	139	19	**70°**	109	**1,′0**	**59,′0**	**4,′0**	**56,′0**	**7,′0**	**53,′0**	**10,′0**	**50,′0**	**13,′0**	**47,′0**	**16,′0**	**44,′0**	**19,′0**	**41,′0**	**22,′0**	**38,′0**	**25,′0**	**35,′0**	**28,′0**	**32,′0**
78	11	168	48	41	138	18	71	108	1,1	58,9	4,1	55,9	7,1	52,9	10,1	49,9	13,1	46,9	16,1	43,9	19,1	40,9	22,1	37,9	25,1	34,9	28,1	31,9
77	12	167	47	42	137	17	72	107	1,2	58,8	4,2	55,8	7,2	52,8	10,2	49,8	13,2	46,8	16,2	43,8	19,2	40,8	22,2	37,8	25,2	34,8	28,2	31,8
76	13	166	46	43	136	16	73	106	1,3	58,7	4,3	55,7	7,3	52,7	10,3	49,7	13,3	46,7	16,3	43,7	19,3	40,7	22,3	37,7	25,3	34,7	28,3	31,7
75	14	165	45	44	135	15	74	105	1,4	58,6	4,4	55,6	7,4	52,6	10,4	49,6	13,4	46,6	16,4	43,6	19,4	40,6	22,4	37,6	25,4	34,6	28,4	31,6
74	15	164	44	45	134	14	75	104	1,5	58,5	4,5	55,5	7,5	52,5	10,5	49,5	13,5	46,5	16,5	43,5	19,5	40,5	22,5	37,5	25,5	34,5	28,5	31,5
73	16	163	43	46	133	13	76	103	1,6	58,4	4,6	55,4	7,6	52,4	10,6	49,4	13,6	46,4	16,6	43,4	19,6	40,4	22,6	37,4	25,6	34,4	28,6	31,4
72	17	162	42	47	132	12	77	102	1,7	58,3	4,7	55,3	7,7	52,3	10,7	49,3	13,7	46,3	16,7	43,3	19,7	40,3	22,7	37,3	25,7	34,3	28,7	31,3
71	18	161	41	48	131	11	78	101	1,8	58,2	4,8	55,2	7,8	52,2	10,8	49,2	13,8	46,2	16,8	43,2	19,8	40,2	22,8	37,2	25,8	34,2	28,8	31,2
70	19	160	40	49	130	10	79	100	1,9	58,1	4,9	55,1	7,9	52,1	10,9	49,1	13,9	46,1	16,9	43,1	19,9	40,1	22,9	37,1	25,9	34,1	28,9	31,1
69	**20°**	159	39	**50°**	129	9	**80°**	99	**2,′0**	**58,′0**	**5,′0**	**55,′0**	**8,′0**	**52,′0**	**11,′0**	**49,′0**	**14,′0**	**46,′0**	**17,′0**	**43,′0**	**20,′0**	**40,′0**	**23,′0**	**37,′0**	**26,′0**	**34,′0**	**29,′0**	**31,′0**
68	21	158	38	51	128	8	81	98	2,1	57,9	5,1	54,9	8,1	51,9	11,1	48,9	14,1	45,9	17,1	42,9	20,1	39,9	23,1	36,9	26,1	33,9	29,1	30,9
67	22	157	37	52	127	7	82	97	2,2	57,8	5,2	54,8	8,2	51,8	11,2	48,8	14,2	45,8	17,2	42,8	20,2	39,8	23,2	36,8	26,2	33,8	29,2	30,8
66	23	156	36	53	126	6	83	96	2,3	57,7	5,3	54,7	8,3	51,7	11,3	48,7	14,3	45,7	17,3	42,7	20,3	39,7	23,3	36,7	26,3	33,7	29,3	30,7
65	24	155	35	54	125	5	84	95	2,4	57,6	5,4	54,6	8,4	51,6	11,4	48,6	14,4	45,6	17,4	42,6	20,4	39,6	23,4	36,6	26,4	33,6	29,4	30,6
64	25	154	34	55	124	4	85	94	2,5	57,5	5,5	54,5	8,5	51,5	11,5	48,5	14,5	45,5	17,5	42,5	20,5	39,5	23,5	36,5	26,5	33,5	29,5	30,5
63	26	153	33	56	123	3	86	93	2,6	57,4	5,6	54,4	8,6	51,4	11,6	48,4	14,6	45,4	17,6	42,4	20,6	39,4	23,6	36,4	26,6	33,4	29,6	30,4
62	27	152	32	57	122	2	87	92	2,7	57,3	5,7	54,3	8,7	51,3	11,7	48,3	14,7	45,3	17,7	42,3	20,7	39,3	23,7	36,3	26,7	33,3	29,7	30,3
61	28	151	31	58	121	1	88	91	2,8	57,2	5,8	54,2	8,8	51,2	11,8	48,2	14,8	45,2	17,8	42,2	20,8	39,2	23,8	36,2	26,8	33,2	29,8	30,2
60	29	150	30	59	120	0	89	90	2,9	57,1	5,9	54,1	8,9	51,1	11,9	48,1	14,9	45,1	17,9	42,1	20,9	39,1	23,9	36,1	26,9	33,1	29,9	30,1
C	W	S	C	W	S	C	W	S	60′—58′		57′—55′		54′—52′		51′—49′		48′—46′		45′—43′		42′—40′		39′—37′		36′—34′		33′—31′	

Berichtigungen zu Teil III.

S. 22 gehört die Randnummer 33 in die unterste Zeile.

S. 75, Aufgabe 179 lies 4 *prϱ* statt *prϱ*.

S. 83, Nr. 77 u. S. 85, Nr. 36 u. 37 ist die Minutenzahl von β 47 und nicht 57.

S. 98 ist die Verstärkung der unter dem Numerus 20 stehenden wagerechten Linie versehentlich unterblieben.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schlegel, Victor,

Lehrbuch der elementaren Mathematik

Bd.: 3

1880

Math.u. 176 m-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11652301-8